תרגיל 3 אלגברה מופשטת 1

1. נתונה התמורה הבאה ב- S_7 : $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&5&1&6&4&7&2\end{pmatrix}$.

(i) רשמו אותה כמכפלת מחזורים זרים, ומצאו את הסדר שלה.

(ii) האם $a\in A_7$?

(iii) מה הסדר של a^{20} ?

(iv) רשמו את a^{-1} כמכפלת מחזורים זרים.

פתרון:

(i) $a=(13)(25467)$.

(ii) (13) אי זוגית ו (25467) זוגית ולכן a איננה זוגית.

(iii) $10|20$ ולכן $a^{20}=id$

(iv) $a^{-1}=(13)(76452)=(13)(27645)$

2. א. מצא $a\in S_6$ כך ש $a^{-1}(12)(34)a=(56)(13)$.

ב.הראה כי לא קיים $a\in S_8$ כך ש $a^{-1}(123)a=(13)(578)$.

פתרון

א. $(56)(13)=(a(1)a(2))(a(3)a(4))$ ולכן $a(1)=5,a(2)=6,a(3)=1,a(4)=3$

אז למשל $a=(1543)(26)$.

ב. הצמדה שומרת על מבנה המעגל, ולכן לא ייתכן שנקבל שני מעגלים ממעגל אחד שהייה לפני ההצמדה.

3. נתונה הגדרה חלקית של תמורה $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&1&2&?&?&7&8&9&6\end{pmatrix}\in S_9$

ידוע כי התמורה היא זוגית חשב את $\sigma(4)$ ואת $\sigma(5)$.

פתרון

$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&1&2&?&?&7&8&9&6\end{pmatrix}=(132)(6789)(??)$ המעגל (132) הוא זוגי והמעגל (6789) הוא אי זוגי. על מנת לקבל תמורה זוגית אנחנו צריכים להוסיף עוד מעגל אי זוגי ולכן נקבל $\sigma=(132)(6789)(45)$ ז"א $\sigma(4)=5,\sigma(5)=4$.

4. תהי $\sigma\in S_9$ מסדר 5. עבור כמה $1\le k\le 9$ מתקיים $\sigma(k)=k$?

פתרון

$\sigma \in S_9$ ניתנת לכתיבה בתור מעגל של 5. ב.ה.ג.כ נסמן את האיברים שנמצאים במעגל בתור 1,2,3,4,5.
(אם בתמורה כלשהי אלו מספרים אחרים, נכנה את האיברים השונים בשמות חדשים).
ואז $\sigma=(12345)$ וקיבלנו שישנם ארבעה איברים שעבורם מתקיים $\sigma(k)=k$.

ממבחן (2010 סמסטר קיץ מועד א)

5. א. הוכח או הפרך: לא קיימת חבורה G ומונומורפיזם $G\to G$ שהוא לא איזומורפיזם.
ב.הוכח או הפרך: קיים אפימורפיזים $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\Omega_{2010}\times\mathbb{Z}_{999}\times\Omega_{50}$.
ג.מצאו איזומורפיזם $\mathbb{R}_+\times\Omega_2\cong\mathbb{R}^*$ ותארו תת חבורה H בחבורה $G:=\mathbb{C}^*\times D_{100}$ כך שחבורת מנה G/H איזומורפית ל $\mathbb{R}^*$.

__פתרון__

א. קיים מונומורפיזים. למשל $G=\mathbb{Z}$ והמונומרפיזים $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ המוגדר ע"י $\varphi(z)=3z$ הוא לא איזומורפיזים.

ב. קיים אפימורפיזים. נשים לב ש $\Omega_{50}\cong\mathbb{Z}_{50},\Omega_{2010}\cong\mathbb{Z}_{2010}$. מכיוון ש $20\cdot 50-999=1$ נקבל ש $(50,999)=1$. ראינו שאם $(m,n)=1$ אז $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}_{mn}$ ולכן $\mathbb{Z}_{999}\times\mathbb{Z}_{50}=\mathbb{Z}_{999\cdot 50}$ וסה"כ $\Omega_{2010}\times\mathbb{Z}_{999}\times\Omega_{50}\cong\mathbb{Z}_{2010}\times\mathbb{Z}_{999\cdot 50}$ ולכן מספיק להראות שקיים אפימורפיזים
$\varphi:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{2010}\times\mathbb{Z}_{999\cdot 50}$ נגדיר $\varphi(a,b)=(\bar{a},\bar{b})$ כאשר
$\bar{a}=a(\operatorname{mod}2010),\bar{b}=b(\operatorname{mod}(999\cdot 50))$.

ג. נגדיר $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}_+\times\Omega_2$ ע"י $f(a)=(|a|,sign(a))$.

הומומורפיזים

יהיו $a,b\in\mathbb{R}^*$. $f(a\cdot b)=(|a\cdot b|,sign(a\cdot b))=(|a|\cdot|b|,sign(a)\cdot sign(b))=f(a)\cdot f(b)$.

מונומורפיזים

יהיו $a,b\in\mathbb{R}^*$. כך ש $f(a)=f(b)$ ז"א $(|a|,sign(a))=(|b|,sign(b))$ ולכן
$a=b\Leftarrow|a|=|b|\wedge sign(a)=sign(b)$.

אפימורפיזים

עבור $(a,b)\in(\mathbb{R}_+,\Omega_2)$ $|b|=1\Leftarrow b\in\Omega_2$ $sign(a)=1\wedge|a|=a\Leftarrow a\in\mathbb{R}_+$ ולכן
$f(a\cdot b)=(|a\cdot b|,sign(a\cdot b))=(|a|\cdot|b|,sign(a)\cdot sign(b))=(a,b)$.

ההעתקה $\left.\begin{matrix}g:C^*\to R_+\\ g(z)=|z|\end{matrix}\right\}$ היא אפימורפיזים. $g(z)=1\Leftrightarrow|z|=1$ ולכן הגרעין T הוא מעגל היחידה. על פי משפט האיזומורפיזים הראשון נקבל ש $\mathbb{C}^*/T\cong\mathbb{R}_+$. בנוסף $D_{100}/C_{100}\cong\Omega_2$ ולכן

$$H:=T\times C_{100} \text{ ז"א } (C^*\times D_{100})/(T\times C_{100})\cong C^*/T\times D_{100}/C_{100}\cong R_+\times\Omega_2$$

ממבחן (2009 סמסטר קיץ מועד ב)

6. תהא $G=S_4$ הפועלת על הקבוצה $X=\{1,2,3,4\}$ ע"י: $g*x=g(x)$.

א. חשב את המייצב A של $X=2$.
ב. האם $A \lhd G$? נמק.
ג. האם מחלקת הצמידות של כל $id \neq \alpha \in A$ מוכלת בתוך A?
ד. מהי הדרגה של A? (ספר האיברים המינימאלי שיכולים ליצור יחד את A)

פתרון

א. המייצב של $x=2$ $stb(2)=\{g\in G | g*2=2\}=\{g\in G | g(2)=2\}$ והן כל התמורות המקיימות $g(2)=2$. $\{id,(13),(14),(34),(134),(143)\}$.

ב. לא, נשים לב ש $(12)^{-1}=(12)$ ובנוסף $(12)(13)(12)=(23)\notin A$ ולכן A לא תת חבורה נורמלית.

ג. לא, עבור $\alpha=(13)\in A$ הצמוד $(12)\notin A$.

ד. חבורה בת 6 איברים איזומורפית ל C_6 או ל D_3 מכיוון שהחבורה A לא אבלית היא איזומורפית ל D_3 ולכן הדרגה שלה היא 2.

7. תהי $G=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a>0\}$ עם הפעולה $(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)$ הראו ש $K=\{(a,0) | a>0\}$ היא תת חבורה אבל לא נורמלית.

פתרון

איבר היחידה $(1,0)\in K$.

לכל שני איברים $(a,0),(b,0)\in K$ מתקיים $(a,0)*(b,0)=(ab,a\cdot 0+0)=(ab,0)\in\mathbb{R}^2$.

עבור $(a,0)\in K$ מתקיים $(a,0)\cdot(a^{-1},0)=(a\cdot a^{-1},0)=(1,0) \Leftarrow (a,0)^{-1}=(a^{-1},0)\in K$ ולכן K תת חבורה.

נוכיח ש K לא תת חבורה נורמלית.

$(1,1)*(1,-1)=(1,0) \Leftarrow (1,1)^{-1}=(1,-1)$.

$(2,0)\in K$ אבל $(1,1)*(2,0)*(1,-1)=(2,-1)\notin K$ ולכן K לא תת חבורה נורמלית.

8. עבור $H\leq G$ נגדיר את המנרמל של H ב G: $N(H):=\{g\in G | gH=Hg\}$.

הוכיחו:

א. $N(H)\leq G$ ו $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$.

ב. $H\lhd N(H)$.

ג. אם $H\lhd K\leq G$ אזי $K\leq N(H)$.

ד. נתבונן ב S_6 ובקבוצה הבאה: $H=\{\sigma\in S_6 : \sigma(2)=2,\sigma(4)=4,\sigma(6)=6\}$.

i. הוכיחו ש H היא תת חבורה ושהיא איזומורפית ל S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?

ii. הוכיחו שב $N(H)$ יש שתי תתי חבורות K,L כך ששתיהן איזומורפיות ל S_3 ו $K\cap L=id$.

פתרון

א) $N(H)\le G$ **ו-** $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$.

נוכיח תחילה כי $N(H)\le G$. ברור ש- $N(H)$ אינה ריקה, שכן $1_G\in N(H)$. יהיו $a,b\in N(H)$.

מתקיים: $(ab)H=a(bH)=a(Hb)=(aH)b=(Ha)b=H(ab)$ ולכן $ab\in N(H)$. כעת, יהי

$a\in N(H)$. מתקיים: $(a^{-1})H=(aH)^{-1}=(Ha)^{-1}=H(a^{-1})$ ולכן $a^{-1}\in N(H)$.

נוכיח כעת את הטענה $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$. הכיוון הראשון טריוויאלי (שכן, אם $H\lhd G$ אזי

$gH=Hg$ לכל $g\in G$). הכיוון השני טריוויאלי מהגדרת ת"ח נורמלית.

ב) $H\lhd N(H)$.

רואים מההגדרה כי $H\subseteq N(H)$ ולכן היא ת"ח. נותר להראות שהיא נורמלית. קל לראות שלכל

$a\in N(H)$ ולכל $h\in H$ מתקיים $aha^{-1}\in H$.

ג) אם $H\lhd K\le G$ **אזי** $K\le N(H)$.

מספיק להראות ש- K מוכלת ב- $N(H)$ (מדוע?). $H\lhd K$ ולכן <u>לכל</u> $k\in K$ מתקיים $kHk^{-1}=H$,

ומהגדרת המנרמל רואים כי $k\in N(H)$. לכן, $K\subseteq N(H)$.

ד) נתבונן ב- S_6 **ובקבוצה הבאה:** $H=\{\sigma\in S_6:\sigma(2)=2,\sigma(4)=4,\sigma(6)=6\}$.

1. **הוכיחו ש-** H **היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל-** S_3. **האם היא תת חבורה נורמלית?**
ההוכחה ש- H היא תת חבורה – פשוט לפי ההגדרה. H לא מזיזה את המספרים $2,4,6$ ולכן ניתן להסתכל על התמורות שלה כעל תמורות של המספרים $\{1,3,5\}$. לכן $H\cong S_3$. H אינה תת חבורה נורמלית ב- S_6, שכן תת חבורה נורמלית (בחבורת התמורות) צריכה להכיל את כל התמורות מאותו המבנה. עם זאת, $(1\,3\,5)\in H$, אך התמורה הצמודה לה לא נמצאת שם - $(1\,2\,4)\notin H$.
2. **הוכיחו שב-** $N(H)$ **יש שתי תת-חבורות** K,L – **כך ששתיהן איזומורפיות ל-** S_3 **ו-** $L\cap K=\{id\}$.
החבורה הראשונה היא H עצמה (שכן היא תת חבורה של המנרמל שלה ואכן איזומורפית ל- S_3).
החבורה השניה היא : $K=\{\sigma\in S_6\ :\ \sigma(1)=1,\sigma(3)=3,\sigma(5)=5\}$. מתקיים
$K\cap H=\{id\}$. כמו כן, כל האיברים של K (פרט לתמורת הזהות) זרים לאיברי H ולכן
מתקיים: <u>לכל</u> $k\in K$ $kH=Hk$ ולכן $K\le N(H)$. קל לראות מדוע גם K איזומורפית ל- S_3.

9. א. מצאו את מספר האוטומורפיזים של $\mathbb{Z}_9$ ושל $\mathbb{Z}_{13}$.
ב. מצאו את מספר האוטומורפיזים של $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_{13}$.

<u>פתרון</u>

א) $Aut(\mathbb{Z}_9)=U_9 \rightarrow |Aut(\mathbb{Z}_9)|=|U_9|=9\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=6$

$Aut(\mathbb{Z}_{13})=U_{13} \rightarrow |Aut(\mathbb{Z}_{13})|=|U_{13}|=12$

ב) מכיוון ש- $\gcd(9,13)=1$ אז $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_{13}\cong\mathbb{Z}_{117}$.

לכן מספר האוטומורפיזמים הוא $\varphi(117)=117\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{13}\right)=72$.

10. הוכח שאם $\varphi: G\rightarrow G'$ הומומורפיזים ו $a\in ker\varphi$ אז לכל $g\in G$ $gag^{-1}\in ker\varphi$

__פתרון__

מכיוון ש $\varphi: G\rightarrow G'$ הומומורפיזים אז $\varphi(gag^{-1})=\varphi(g)\varphi(a)\varphi(g^{-1})=\varphi(g)\cdot e\cdot\varphi(g^{-1})=e$.

11. הוכח כי הפונקציות הבאות הינם הומומורפיזים ומצא את הגרעין והתמונה.

א. $\varphi: S_n\rightarrow\{-1,1\}$. $\varphi(a)=sign(a)$.

ב. $\varphi:(\mathbb{C},+)\rightarrow(M_2(\mathbb{R}),+)$. $\varphi(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.

ג. $\varphi:(\mathbb{C}^*,*)\rightarrow(GL_2(\mathbb{R}),*)$. $\varphi(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$. בסעיף זה הסבר גם מדוע הפונקציה מוגדרת היטב.

__פתרון__

א. נוכיח ש $\varphi(a)=sign(a)$ הומומורפיזם. מכיוון שלכל שתי תמורות σ,τ מתקיים $sign(\sigma\tau)=sign(\sigma)\cdot sign(\tau)$ נקבל הומומורפיזם.

מציאת הגרעין: $k\,\mathrm{er}\,\varphi=\{a\in S_n | \varphi(a)=1\}=\{a\in S_n | sign(a)=1\}=A_n$.

מציאת התמונה: אם התמורה זוגית נקבל 1 ואם התמורה אי זוגית נקבל 1- ולכן $I\,\mathrm{m}\,\varphi=\{-1,1\}$.

ב. נוכיח ש $\varphi:(\mathbb{C},+)\rightarrow(M_2(\mathbb{R}),+)$ הומומורפיזם. יהיו a_1+b_1i, a_2+b_2i כך ש $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$.

$$\varphi(a_1+b_1i+a_2+b_2i)=\varphi(a_1+a_2+(b_1+b_2)i)=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2\\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ -b_2 & a_2\end{pmatrix}=\varphi(a_1+b_1i)+\varphi(a_2+b_2i)$$

$$k\,\mathrm{er}\,\varphi=\{a+bi\in\mathbb{C} | \varphi(a+bi)=0\}=\left\{a,b\in\mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}=\{0\}.$$

$$im\varphi=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

ג. הפונקציה מוגדרת היטב מכיוון שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ נקבל ש $\left|\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\right| = a^2+b^2$. $a^2+b^2=0$
אם ורק אם $a=b=0$ אבל $0\notin\mathbb{C}^*$ ולכן $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$.

נוכיח הומומורפיזם:

$$\varphi\left((a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)\right)=\varphi\left(a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_1+a_1b_2)i\right)=\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_1b_1+a_1b_2 \\ -(a_1b_1+a_1b_2) & a_1a_2-b_1b_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2\end{pmatrix}=\varphi(a_1+b_1i)\cdot\varphi(a_2+b_2i)$$

נחשב את הגרעין

$$k\operatorname{er}\varphi=\left\{a+bi\in\mathbb{C}\,\middle|\,\varphi(a+bi)=I\right\}=\left\{a,b\in\mathbb{R}\,\middle|\,\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}=\{1\}.$$

והתמונה $im\varphi=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

12. יהיו φ,ψ הומומורפיזים, ונניח שפעולת ההרכבה $\varphi\circ\psi$ מוגדרת היטב.

א. הוכח שאם φ,ψ אפימורפיזים אז $\varphi\circ\psi$ אפימורפיזים.

ב. הוכח שאם φ,ψ מונומורפיזים אז $\varphi\circ\psi$ מונומורפיזים.

<u>פתרון</u>

נוכיח תחילה ש $\varphi\circ\psi$ הומומורפיזם.

$$\varphi\circ\psi(a\otimes b)=\varphi\left(\psi(a\otimes b)\right)=\varphi\left(\psi(a)\oplus\psi(b)\right)=\varphi\left(\psi(a)\right)\odot\varphi\left(\psi(b)\right)=\varphi\circ\psi(a)\odot\varphi\circ\psi(b)$$

א. יהי $c\in G$ מכיוון ש φ פונקציה על קיים $b\in H$ כך ש $\varphi(b)=c$ ומכיוון ש ψ פונקציה על קיים $a\in A$ כך ש $\psi(a)=b$. $(\varphi\circ\psi)(a)=\varphi(\psi(a))=\varphi(b)=c$.

ב. יהיו $x_1,x_2\in A$ כך ש $(\varphi\circ\psi)(x_1)=(\varphi\circ\psi)(x_2)$ על פי הגדרת ההרכבה $\varphi(\psi(x_1))=\varphi(\psi(x_2))$ מכיוון ש φ חח"ע נקבל ש $\psi(x_1)=\psi(x_2)$ מכיוון ש ψ חח"ע נקבל ש $x_1=x_2$.