**מבוא לחוגים ומודולים – תרגיל בית 1**

1. הוכיחו שהחוג היחיד שבו מתקיים 0 = 1 הוא חוג ה-0 (כלומר החוג שבו האיבר היחיד הוא 0).
2. יהי חוג המטריצות מגודל 2x2 מעל הממשיים.
   1. תנו דוגמה לתת חוג שלו שיש לו יחידה, אך היחידה של תת-החוג שונה מהיחידה של החוג עצמו.
   2. האם יכול לקרות מצב כזה בחוג עם חילוק (חוג שבו לכל איבר יש הופכי)?
   3. האם יכול לקרות מצב כזה בחוג שאין בו מחלקי 0?
3. יהי R חוג, ותהי משפחה (לא בהכרח סופית ולא בהכרח בת מנייה) של תת חוגים.
   1. הוכיחו: גם תת חוג של R.
   2. האם האיחוד הוא גם תת חוג? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית בה המשפחה **סופית** והאיחוד אינו תת חוג.
   3. כעת נניח ש שרשרת, כלומר לכל i,j מתקיים או להפך. הוכיחו שהאיחוד הוא תת חוג.
4. יהיו R,C חוגים. נגדיר את המכפלה הישרה שלהם להיות אוסף הזוגות הסדורים (r,c) כאשר . הכפל והחיבור מוגדרים איבר איבר.
   1. הוכיחו שזהו חוג .
   2. נניח שR,C שניהם ללא מחלקי אפס. האם זה נכון שגם ב- אין מחלקי אפס? הוכיחו או הפריכו.
5. תהי G חבורה אבלית. נגדיר עליה פעולת כפל: לכל x ו-y xy=0.
   1. הוכיחו שהמבנה החדש שנוצר הוא חוג ללא יחידה.
   2. האם יכולה להיות לחוג שנוצר בצורה זו יחידה? מה צריך לקרות על מנת שזה יתאפשר?
   3. (רשות) חוג בוליאני הוא חוג שבו לכל x. תהי G חבורה אבלית. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שניתן לבנות חוג בוליאני שG היא החבורה החיבורית שלו.