אינפי 1 – תרגיל 3

<u>תזכורת</u>: עבור $\alpha > 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \infty$ ועבור $|\alpha| < 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$

1. עבור הסדרות הבאות, מצא האם קיים גבול, ואם כן מצא אותו והוכח שהוא אכן הגבול (בשימוש בהגדרת הגבול, שלילת גבול או אריתמטיקה של גבולות):

א. $\frac{1}{\sqrt{n}}$

ב. $\frac{1}{n}\sin(n!)$

ג. $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

ד. $\frac{3^{n-1}}{2^n}$

ה. $\frac{3^n}{2^{\left(n^2\right)}}$

2. ידוע ש $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ עבור כל סדרה a_n המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. מצא את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ עבור $a \in \mathbb{R}$. שים לב להבחין בין שני מקרים של a.

3. הוכח: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

4. הוכח: אם a_n מתכנסת אזי היא חסומה מלעיל ומלרע

5. הוכח/הפרך:

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, אזי $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

ב. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

ג. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ ו a_n מתכנסת, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

ד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי $b_n = \frac{1}{a_n}$ מתכנסת במובן הרחב לאינסוף או למינוס אינסוף.

ה. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי $b_n = \left|\frac{1}{a_n}\right|$ מתכנסת במובן הרחב לאינסוף.

ו. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

6. מצא את גבול הסדרה $\sqrt[n]{a}$ עבור $0 \le a \in \mathbb{R}$ והוכח שהוא אכן הגבול. רמזים:

* הפרד בין מקרים שונים של a

* חוק הסנדביץ: אם $a_n \to L$ ו $b_n \to L$ ו $a_n \le c_n \le b_n$ אזי $c_n \to L$. השתמש בחוק זה ובגבולות של סדרות שלמדנו

*אריתמטיקה של גבולות

7. תהי a_n סדרה מתכנסת לגבול ממשי $L \in \mathbb{R}$. תהי b_n סדרה חסומה שאינה מתכנסת. הוכח: הסדרה $c_n = a_n b_n$ מתכנסת אם"ם $L = 0$