

## תרגיל בית 3 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תשפ"ב

**שאלה 1** (חימום). הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. כל חבורה ציקלית היא אבלית.

ב. כל חבורה אבלית היא ציקלית.

ג. אם  $o(a) = n$ , אז  $a^{-1} = a^{n-1}$ .

**שאלה 2** (חימום). כתבו את לוחות הכפל של  $U_5, U_8$  ובדקו האם הן ציקליות.

**שאלה 3**. תהי  $G$  חבורה, ותהי  $\emptyset \neq H \subseteq G$  תת-קבוצה לא ריקה.

א. הוכיחו שאם  $G$  חבורה סופית, אז כדי להוכיח ש- $H$  היא תת-חבורה של  $G$  מספיק לבדוק סגירות לפעולה.

ב. הפריכו את הסעיף הקודם כאשר  $G$  אינסופית.

**שאלה 4**. תהי  $G$  חבורה ויהיו  $a, b \in G$  איברים. הוכיחו כי  $o(ab) = o(ba)$ .  
זהירות: לא הנחנו שהחבורה אבלית או שהסדרים סופיים.

**שאלה 5**. מצאו את כל המספרים השלמים  $x \in \mathbb{Z}$  המהווים פתרון לכל אחת מהמשוואות הבאות:

א.  $33x \equiv 1 \pmod{218}$

ב.  $-7x + 3 \equiv 9 \pmod{30}$

**שאלה 6**. האם קיים  $n \in \mathbb{N}$  שעבורו  $U_n \cong \mathbb{Z}_{2021}$ ?  
(רמז: מה תוכלו לומר על הזוגיות של  $\varphi(n)$ ?)

**שאלה 7**. זה בסדר לדחות את השאלה הזאת לשבוע הבא.

א. יהיו  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . הוכיחו כי  $(a, b) = (a, c) = 1$  אם ורק אם  $(a, bc) = 1$ .  
רמז: אפשר להעזר בשאלה 4 מתרגיל הבית הראשון.

ב. פונקציית אוילר  $\varphi(n)$  מתאימה לכל  $n \in \mathbb{N}$  כמה מספרים טבעיים קטנים וזרים ל- $n$ . יש. כלומר

$$\varphi(n) = |\{a \mid 0 < a < n, (a, n) = 1\}|$$

הוכיחו כי  $(n, m) = 1$  אם ורק אם  $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ .

ג. הוכיחו שכשסוכמים את פונקציית אוילר על פני כל המחלקים (הטבעיים) של  $n$  מקבלים

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

רמז: יש כל מיני דרכים לפתור את זה. אחת הדרכים היא עם תכונות ציקליות. הזכרו כמה יוצרים יש לחבורה ציקלית וכי כל תת-חבורה שלה היא ציקלית.

## שאלות רשות

**שאלה 8.** תהי  $G$  חבורה סופית. הוכיחו כי מספר האיברים מסדר 3 הוא זוגי (אולי אפס).  
מה לגבי מספר האיברים מסדר  $p$  כאשר  $p$  מספר ראשוני אי זוגי?

**שאלה 9.** מצאו חבורה אינסופית שלכל  $n \in \mathbb{N}$  קיים בה איבר מסדר  $n$ . האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי?  
כמו כן, לכל  $m > 1$  מצאו חבורה אינסופית  $G_m$  שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר  $m$ .

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה  $\aleph_0$ ?

בהצלחה!