

קומבינטוריקה להנדסה - תרגול 6

23 בנובמבר 2020

1 עקרון הסכום והמכפלה

תרגילים:

1. תהינה A, B קבוצות סופיות. חשבו את $|A \Delta B|$.
פתרון: נשתמש בעקרון הסכום המוכלל: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. כעת, נשים לב שמתקיים: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. כיון ש- $A \cap B \subset A \cup B$ נקבל מתרגול שעבר $|A \Delta B| = |(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = |A \cup B| - |A \cap B|$, ולכן:
$$|A \Delta B| = |(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

הערה: שיעור שעבר אמרנו שאם $X \subset Y$ אז $|Y \setminus X| = |Y| - |X|$.

2 בעיות מנייה

k מתוך n	עם חשיבות לסדר	בלי חשיבות לסדר
עם חזרה	n^k	$\binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$
בלי חזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

תרגילים:

1. לפנינו n כדורים ב- n צבעים שונים, ו- n כדורים שקופים זהים. בכמה דרכים ניתן לחלק את הכדורים ל- $2n$ תאים ממוספרים, כאשר:

(א) בכל תא לכל היותר כדור אחד.

פתרון: כיון שיש בדיוק $2n$ תאים, נקבל שבכל תא יש בדיוק כדור אחד. הבחירה היא בחירת התאים בהם נשים את הכדורים. נתחיל מהשקופים: אנחנו צריכים לבחור n תאים מתוך $2n$ בלי חזרה (כי אסור יותר מכדור אחד בתא) ואין חשיבות לסדר (כי כולם אותו דבר, שקופים זהים). לכן נקבל: $\binom{2n}{n}$. לגבי הצבעוניים: נותר לבחור n תאים מתוך n התאים שנותרו, בלי חזרה (כי

אסור יותר מכדור אחד) ועם חשיבות לסדר (כי הם צבעוניים שונים), נקבל:

$$\frac{n!}{(n-n)!} = n! \cdot \binom{n}{n} \cdot n! \text{ בסה"כ: } \binom{2n}{n} \cdot n!$$

(ב) בכל תא לכל היותר כדור שקוף אחד.

פתרון: לגבי השקופים: זו בחירה של n תאים מתוך $2n$, ללא חזרה (כי אסור יותר מאחד בתא) וללא חשיבות לסדר כי הם שקופים. נקבל: $\binom{2n}{n}$. לגדבי צבעוניים: זו בחירה של n תאים מתוך $2n$, עם חזרה (כי אין הגבלה על מספר הצבעוניים) ועם חשיבות לסדר (כי הם צבעוניים). נקבל: $(2n)^n$. בסה"כ: $\binom{2n}{n} \cdot (2n)^n$ (כפל כי כל בחירה של קשופים מתאימה לכל אחת של הצבעוניים, ולכן נקבל זאת מעקרון הכפל).

(ג) בכל תא לכל היותר כדור צבעוני אחד.

פתרון: לגבי השקופים: זו בחירה של n תאים מתוך $2n$, עם חזרה (כי מותר יותר מאחד בתא), ללא סדר (כי שקופים). נקבל: $\binom{3n-1}{n} = \binom{n+2n-1}{n}$. לגבי הצבעוניים: זו בחירה של n תאים מתוך $2n$, ללא חזרה (כי אסור יותר מאחד) ועם חשיבות לסדר (כי צבעוניים). נקבל: $\frac{(2n)!}{(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!}$. בסה"כ: $\frac{(2n)!}{n!} \cdot \binom{3n-1}{n}$

(ד) בכל תא מספר זהה של שקופים וצבעוניים.

פתרון: נדביק לכל כדור צבעוני כדור שקוף, ונסדר את הזוגות: זו בחירה של n תאים מתוך $2n$, עם חזרה (כי אין הגבלה) ועם חשיבות לסדר (כי הצבעוניים קובעים פה סדר). נקבל: $(2n)^n$.

הערה: לגבי הכפל בכל הסעיפים: בכל סעיף חישבנו בנפרד מה לגבי השקופים (נסמן רגע את קבוצת האפשרויות הזו ב- A), ובנפרד מה לצבעוניים (קבוצה זו ב- B). כל סידור של הכדורים הוא בעצם שקול לזוג $(a, b) \in A \times B$. ולכן מספר הסידורים הוא:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$