

תרגיל 3 בפונקציות מרוכבות

1. כתבו את הפונקציה הבאה באמצעות משתנה z (בלבד, בלי $\bar{z}$ או $|z|$ וכדומה).

$$x - \frac{x}{x^2 + y^2} + i(y + \frac{y}{x^2 + y^2})$$

פתרון: קל לבדוק שזה שווה ל

$$x - \frac{x}{x^2 + y^2} + i(y + \frac{y}{x^2 + y^2}) = x + iy - \frac{x - iy}{|z|^2} = z - \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = z - \frac{1}{z}$$

2. הגדירו את הפונקציה

$$f(z) = (\frac{1}{z} - \frac{1}{2}) \frac{1}{z - 2}$$

בנקודה $z = 2$ כך שתהיה רציפה שם.

פתרון: קל לראות שלמעט בנקודה $z = 2$ מתקיים

$$(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}) \frac{1}{z - 2} = \frac{2 - z}{2z} \frac{1}{z - 2} = -\frac{1}{2z}$$

ולכן יש להגדיר $f(2) = -\frac{1}{4}$

3. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה $z = 0$ ומצאו אותו אם הוא קיים:

$$\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}} \quad (\text{א})$$

פתרון:

$$\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}^2 - z^2}{z\bar{z}} = \frac{x^2 - 2ixy - y^2 - (x^2 + 2ixy - y^2)}{x^2 + y^2} = -i \frac{4xy}{x^2 + y^2}$$

לפי כלים של אינפי 3, זה לא מתכנס (למשל מתקדמים לאורך $y = 0$ ולאורך

$$(x = y$$

$$\frac{z \operatorname{Re}(z)}{\bar{z}}) \quad (\text{ב})$$

פתרון:

$$\frac{z \operatorname{Re}(z)}{\bar{z}} = \frac{z^2 \operatorname{Re}(z)}{z\bar{z}} = \frac{(x^2 + 2ixy - y^2)x}{x^2 + y^2} = \frac{x^3}{x^2 + y^2} - \frac{y^2x}{x^2 + y^2} + 2i \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$$

נעבור חלק חלק ונראה שכולם מתכנסים (ל 0 כמובן) באמצעות שיטות של אינפי

3

$$|\frac{x^3}{x^2 + y^2}| \leq |\frac{x^3}{x^2}| = |x| \rightarrow 0$$

$$|\frac{y^2x}{x^2 + y^2}| \leq |\frac{y^2x}{2xy}| = |\frac{y}{2}| \rightarrow 0$$

ובדומה החלק השלישי ולכן הפונקציה מתכנסת ל 0.

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\bar{z}} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\bar{z}} = \frac{y}{x - iy} = \frac{xy + iy^2}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} + i \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

החלק הממשי והמדומה מתבדרים ולכן הגבול לא קיים.

4. הוכיחו כי אם f גזירה ב z_0 אז היא רציפה ב z_0 (כמובן, ההוכחה זהה להוכחה באינפי).

פתרון: נוכיח כי

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = 0$$

זה קורה מפני ש

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

כנדרש

5. הראו לפי הגדרה שהפונקציה $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ אינה גזירה בשום מקום (כלומר, לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ הנגזרת $f'(z_0)$ לא קיימת) **פתרון:** טוב, נראה לפי הגדרה. נסתכל על הגבול.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)}{z - z_0}$$

נסמן כרגיל $z = x + iy$ ו $z_0 = x_0 + iy_0$. אם נתקדם במקביל לציר x , כלומר לאורך $z = x + iy_0$ אז נקבל

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

לעומת זאת אם נתקדם במקביל לציר y , כלומר $z = x_0 + iy$ נקבל ש

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x_0 - x_0}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} = 0$$

ולכן אין גבול והפונקציה לא גזירה.