

1 לינאריות

1. נפתור משהו דומה לשאלה 7ג:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

אנחנו רוצים להגדיר מכפלה פנימית, עבורה B אורתונורמלי.
פתרון: בסעיף א ההדרכה אומרת להגדיר את המכפלה הפנימית על וקטורי המקדמים
בצירוף הלינארי. כלומר, בהינתן $v \in \mathbb{C}^2$ יש $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ כך ש-

$$v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$$

וראינו בסעיף א, שכדאי להגדיר את המכפלה הפנימית לפי אלפות אלו. אז נמצא
אותם: נסמן $v = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$, ונפתור את המערכת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & z \\ -2 & i & w \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & z \\ 0 & 3i & w+2z \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}iR_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & z \\ 0 & 1 & -\frac{w+2z}{3} \cdot i \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1-iR_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z - \frac{w+2z}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{w+2z}{3} \cdot i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{z-w}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{w+2z}{3} \cdot i \end{array} \right)$$

כעת, יהיו $v = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$ נקבל

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha = \frac{z-w}{3} \\ \beta = -\frac{w+2z}{3} \cdot i \end{pmatrix}, [u] = \begin{pmatrix} \alpha = \frac{t-s}{3} \\ \beta = -\frac{s+2t}{3} \cdot i \end{pmatrix}$$

ולכן, לפי תוצאת הסעיפים קודמים נגדיר:

$$\langle v, u \rangle = \frac{z-w}{3} \cdot \overline{\frac{t-s}{3}} + -\frac{w+2z}{3} \cdot i \cdot \overline{-\frac{s+2t}{3} \cdot i} = \frac{z-w}{3} \cdot \overline{\frac{t-s}{3}} + \frac{w+2z}{3} \cdot \overline{\frac{s+2t}{3}}$$

כעת, נבדוק אורתוגונליות:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1+2}{3} \cdot \overline{\frac{i-i}{3}} + \frac{-2+2}{3} \cdot \overline{\frac{i+2i}{3}} = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1+2}{3} \cdot \overline{\frac{1+2}{3}} + \frac{-2+2}{3} \cdot \overline{\frac{-2+2}{3}} = 1$$

הערה: אם יש לנו בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ אז מה הצ"ל שנותן את v_i ? כל האלפות
0 חוץ מ $\alpha_i = 1$.

2. לגבי שאלה 3, גרירה מימין לשמאל: אכתוב לכם כאן שתי טענות, ותגיד לי מה אתה חושב: איזו מביניהן נכונה (והיא טענת הגרירה מימין לשמאל), ואיזו לא נכונה (והיא לא הטענה המבוקשת להוכיח):

(א) במילים: אם לכל וקטור במרחב מתקיים שהמכפלה הפנימית שלו עם v היא 0 אז v הוא וקטור האפס. בסימונים:

$$(\forall w \in V : \langle v, w \rangle = 0) \Rightarrow v = 0_V$$

הוכחה: 3 מימין לשמאל.

(ב) במילים: לכל וקטור במרחב מתקיים: אם המכפלה שלו עם v היא 0 אז v הוא וקטור האפס. בסימונים:

$$\forall w \in V : (\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v = 0_V)$$

הפרכה: ניקח $w = 0$ ואז יש הרבה v -ים עבורם הגרירה לא מתקיימת.

2 קומבי

1. כמה סדרות של $1, -1$ יש שכל הסכומים החלקיים הינם אי-שליליים?
פתרון: פה ברור שנתאים 1 לפותח ו-1 לסוגר.

1	2	3	4	5	6
1	3	2	6	5	4

2. מספר התמורות של $(1, \dots, n)$ נגדיר את התמורות כך:

זה כאשר התהליך היה: 1 הוכנס והוצא, 2 הוכנס, 3 הוכנס, 3 הוצא, 2 הוצא, 4-6 הוכנסו ואז הוצאו.

3. בהינתן מצולע קמור, ניתן לשלש אותו, כלומר, להעביר קשתות פנימיות וליצור משולשים. כמה שילוישים אפשריים יש עבור מצולע עם $n+2$ קודקודים (וגם צלעות, למעט המקרה של $n=0$ שבו יש 2 קודקודים וקו ביניהם)? ברור שעבור $n=0$ התשובה היא 0. עבור $n=1$ נקבל 1 ועבור ריבוע 2 וכן הלאה.
הוכחת קטלן: באינדוקציה על n . בסיס עשינו. נניח נכונות לכל $0 \leq k \leq n$, שיש C_k שילוישים למצולע עם $k+2$, ונוכיח עבור $n+1$:

כלומר, יהי P מצולע עם $(n+1)+2$ קודקודים. נראה שמקבלים את מספר קטלן C_n , ע"י להראות שמקבלים את נוסחת הרקורסיה של קטלן. נסמן את קודקודי המצולע ב- $v_1, v_2, \dots, v_{n+3}$ בכיוון השעון. נתמקד בצלע (v_1, v_{n+3}) בשילוש כלשהו. ישנן $n+1$ אפשרויות לקודקוד שלישי במשולש אליו שייכת הצלע: $\forall k \in \{2, \dots, n+2\}$

הקודקוד יכול להיות v_k (כל צלע נמצאת באיזשהו שילוש). כך חילקנו את המצולע לשני תת-מצולעים $(v_k, \dots, v_{n+3}, v_1, \dots, v_k)$ בתוספת המשולש $\Delta v_1, v_{n+3}, v_k$. בתת מצולע הראשון יש $k = (k-2) + 2$ קודקודים, ולכן יש C_{k-2} שילושים לתת מצולע זה, לפי הנחת האינדוקציה. בתת המצולע השני יש $n+3 - (k-1) = (n-k+2) + 2$ קודקודים, ולכן יש C_{n-k+2} שילושים לתת מצולע זה, לפי הנחת האינדוקציה. נסכום על k , וכיון ש- $k \in \{2, \dots, n+2\}$ נקבל:

$$\sum_{k=2}^{n+2} C_{k-2} C_{n-k+2}$$

ע"י הזאת אינדקסים $k' = k - 2$ נקבל שזה שווה לסכום הבא:

$$\sum_{k'=0}^n C_{k'} C_{n-k'}$$

קיבלנו בסה"כ שמתקיים

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$$

ולכן, לפי מה שהוכח בהרצאה, יחד עם הבסיסים נקבל שזהו מספר קטלן. מש"ל.