תרגיל 7

שאלה 1, סעיף 1.

נשתמש בנוסחה

$$\int_{M} f\,dS = \iint_{D} f(\varphi(u,t))\,\|\varphi_u \times \varphi_t\|\,du\,dt$$

כאשר $\varphi: D \longrightarrow M$

הוא פרמטריזציה של M.

במקרה שלנו $f = z$

$$\varphi(u,t) = (u\cos t,\ u\sin t,\ t)$$

כאשר $0 < u \leq 1$ ו $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\varphi_u = (\cos t,\ \sin t,\ 0)$$

$$\varphi_t = (-u\sin t,\ u\cos t,\ 1)$$

נציב ונקבל:

$$\varphi_u \times \varphi_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \sin t & 0 \\ -u\sin t & u\cos t & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\sin t,\ -\cos t,\ u)$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_t\| = \sqrt{1+u^2}$$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$\int z\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 t\sqrt{1+u^2}\,dt\,du =$$

$$\int_0^{2\pi} t\,dt \int_0^1 (1+u^2)\,du = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi^2 \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du$$

שאלה 1, סעיף ב - המשך.

נבצע הצבה $u = \tan x$

$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

$$du = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

נציב ונקבל:

$$\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$$

נבצע החלפה ~~$x = \sin v$~~ ~~$v = \cos$~~

$\sin x = v$, $0 \le v \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

~~ונקבל~~

$$\cancel{\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1-v^2)^2}}$$

נבצע החלפת משתנים $\sin x = v$,

$0 \le v \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ ונקבל:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1-v^2)^2}\,dv =$$ (אינטגרציה של פונ' רציונליות)

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{2x}{x^2-1} - \log(1-x) + \log(x+1)\right)\Big|_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)$$

נכפיל ב 2π $\left(= t^2\big|_0^{2\pi}\right)$ ונקבל את

הערך רצוי.

שאלה 2, סעיף ב

נשים לב שהפונקציה זוגית והתחום סימטרי ביחס לצירים, ולכן נחשב את האינטגרל

$$\int_{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2+y^2 \, dS$$

ונכפיל את התוצאה הסופית ב 2. (כי מחשבים את חצי ספרה).

נזכר, שכאשר $z=f(x,y)$, אזי ניתן להשתמש בנוסחא $dS=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$.

נחשב את f_x ואת f_y.

$$f_x=\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)'_x=$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

באופן דומה:

$$f_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

שאלה ב, סעיף 2 - המשך.

$$\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}} = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}} =$$

$$\sqrt{\cancel{1+2(x^2+y^2)}}$$

$$\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{1-x^2-y^2+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} =$$

$$\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta$$

שאלה 1, סעיף ב -המשך.

נציב ונקבל:

$$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} =$$

$$\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}$$

בגבולות אינטגרציה. תחת $x^2+y^2\le 1$.

האינטגרל הופך ל

$$\int_{x^2+y^2\le 1} x^2+y^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$\cancel{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}$

לאחר החלפה לפולריות נקבל

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\,dr = 2\pi\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\,dr$$

נבצע החלפת משתנים

$r = \sin t$

$dr = \cos t\, dt$

$0 \le t \le \pi/2$.

שאלה 1, סעיף 2 - המשך.

נבצע שוב החלפת משתנים $u = \cos t$, $0 \le u \le 1$

ונקבל:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\, dt = \int_1^0 1-u^2(-u du)$$

$$= \int_0^1 1-u^2 du = u - \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

נכפיל ב- $2\pi \cdot 2$ ונקבל את המבוקש, $\frac{8\pi}{3}$.

שאלה 3, סעיף 3.

dS - כמו קודם

$$dS = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$$

האינטגרל לאחר פולריזציה הופך ל

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^5 \cos^2\theta \sin^2\theta}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta =$$

נחשב.

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^1 \frac{r^5}{\sqrt{1-r^2}} dr$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4\theta}{2}\right) d\theta = \frac{2\pi}{2}/2 = \frac{\pi}{2}$$

נחשב

$$\int_0^1 \frac{r^5}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta =$$

$r = \sin u$
$0 \le u \le \pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 u\,du$$

נציב:

$\cos u = v$

$0 \le v \le 1$

נקבל:

$$-\int_1^0 (1-v^2)^2\,dv = \int_0^1 (1-v^2)^2\,dv =$$

$$= \int_0^1 1 - 2v^2 + v^4\,dv = v - \frac{2}{3}v^3 + \frac{v^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$

נכפיל ונקבל

$$\frac{4}{15}\pi$$

שאלה 2:

נחשב את $\int_M z\,dS$ $\quad M=\left\{(x,y,z) \mid \begin{array}{l} z=x^2+y^2 \\ 0\le z\le 1 \end{array}\right\}$

לפי הנוסחה ונקבל:

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$z_x=2x,\quad z_y=2y$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

האינטגרל הופך ל

$$\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

נבצע החלפה לפולריות ונקבל

$$\iint\limits_{0\le x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\theta$$

נבצע החלפת משתנים $1+r^2=u,$

$$1\le u\le 2$$

$$du=2r\,dr$$

$$\int_0^1 r^3\sqrt{1+r^2}\,dr=\int_1^2\frac{1}{2}\sqrt{u}\,(u-1)\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 u\sqrt{u}-\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^2\sqrt{u}-\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2}-\frac{2}{3}2\sqrt{2}-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}$$

נכפיל ב 2π ונקבל את הדרוש.

<u>שאלה 3:</u> מרחק של הנק' (x,y,z) מציר ה-x

נתון ע"י $\sqrt{y^2+z^2}$.

נציב ונקבל $\int_M \sqrt{y^2+z^2}\,ds$

ואותו חישבנו בשאלה 1, סעיף 2.

<u>שאלה 4:</u> שחזור של שאלה 1, סעיף 1

ב ושאלה 2 של תרגיל 8, משנת תשע"ז.

. הפתרון נמצא שם.