פתרון בוחן 1 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ה

הוראות: ענו על **שלוש שאלות** מתוך ארבע. לכל השאלות משקל זהה.
כתבו בכתב ברור בעט כחול או שחור. אין להשתמש בכל חומר עזר, גם לא במחשבון. **משך הבוחן:** 90 דקות.

שאלה 1 (אי־שיוויון ברנולי). יהי $x > 0$ מספר ממשי. הוכיחו כי לכל מספר טבעי $n \geq 2$ מתקיים $(1+x)^n > 1 + nx$.

פתרון. נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n = 2$. אכן $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ כי $x > 0$.

נניח את נכונות הטענה עבור $n - 1 \geq 2$, כלומר $(1+x)^{n-1} > 1 + (n-1)x$. נוכיח את הטענה ל-n. נחשב

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} > (1+x)(1+(n-1)x) = 1+nx+(n-1)x^2 > 1+nx$$

ולפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל $n \geq 2$.

שאלה 2. נגדיר באופן רקורסיבי פונקציה $g(n)$: אם p הוא מספר ראשוני, אז $g(p) = p$. אחרת, $g(n) = \sum_{p|n} g(p)$ לכל $n \geq 2$. כלומר עבור כל[1] n, ערך הפונקציה $g(n)$ הוא הסכום של ערכי הפונקציה בכל ראשוני p שמחלק את n. דוגמה לכמה ערכים של הפונקציה:

$$g(2) = 2, g(3) = 3, g(4) = 2, g(10) = g(2) + g(5) = 7$$

הוכיחו בעזרת אינדוקציה שלכל מספר טבעי $n \geq 2$ מתקיים $g(n) \leq n$.

פתרון. נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n = 2$. אכן $g(2) = 2 \leq 2$ כי 2 ראשוני.

יהי $n > 2$ ונניח את נכונות הטענה עבור כל $2 \leq k < n$, כלומר $g(k) \leq k$ לכל $2 \leq k < n$. נוכיח את הטענה ל-n.

אם n ראשוני, אז $g(n) = n \leq n$ לפי ההגדרה של הפונקציה. אחרת, אם n לא ראשוני, יש ראשוני p שמחלק את n כך ש-$2 \geq \frac{n}{p}$. בפרט, $p \leq \frac{n}{2}$. נשים לב כי הראשוניים שמחלקים את $\frac{n}{p}$ הם בדיוק הראשוניים שמחלקים את n, פרט אולי ל-p. לכן $g(n) \leq g(\frac{n}{p}) + g(p)$. כעת ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה עבור p ועבור $\frac{n}{p}$. כמו כן, מפני ש-2 הוא הראשוני הקטן ביותר, מתקיים $\frac{n}{p} \leq \frac{n}{2}$. בסך הכל קיבלנו

$$g(n) \leq g(\frac{n}{p}) + g(p) \leq \frac{n}{p} + p \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

ולפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל $n \geq 2$.

הערה: הפונקציה $g(n)$ היא הסכום של הראשוניים שמחלקים את n. בשאלה נדרש להוכיח כי סכום זה קטן או שווה ל-n. חלק מהתשובות לשאלה לא הוכיחו את הטענה הזו, אלא הניחו שהיא נכונה והמשיכו להוכיח טענות אחרות. חשוב לשים לב מה נדרש להוכיח ומה הן ההנחות הנתונות.

---

[1] כל מספר טבעי $n > 1$ ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים. מכפלה כזאת נקראת פירוק של n לגורמים ראשוניים. הפירוק הוא יחיד עד כדי סדר האיברים במכפלה.

שאלה 3. בכיתה יש 30 תלמידים. רוצים לחלק להם כובעים לכבוד מסיבה: 7 כובעי ליצן, 18 מצנפות שינה ו-5 סומבררוס, כך שכל תלמיד יחבוש בדיוק כובע אחד. מה מספר הדרכים לעשות זאת?

פתרון. תחילה נבחר 7 תלמידים מתוך 30 כדי שיחבשו כובע ליצן, ויש $\binom{30}{7}$ אפשרויות כאלו. אחר כך, מתוך $30-7=23$ התלמידים הנותרים נבחר 18 תלמידים שיחבשו מצנפת שינה, ויש $\binom{23}{18}$ אפשרויות כאלו. שאר התלמידים מוכרחים לחבוש סומבררו, הרי $\binom{5}{5}=1$. בסך הכל יש $\binom{30}{7}\binom{23}{18}\binom{5}{5}=\frac{30!}{7!18!5!}$ דרכים לבחירה.

שאלה 4. אתם מעוניינים לשלוח חבילה בדואר, ויש עמלת ביול מינימלית של 12 אגורות. הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי ניתן לשלם כל סכום של 12 אגורות או יותר רק עם בולים של 4 אגורות ושל 5 אגורות. רמז: בפועל יש להוכיח שכל מספר $n \geq 12$ ניתן להציג בצורה $n=4x+5y$ עבור x,y לא שליליים. שימו לב איזה מקרים נכללים בשלב הבסיס ומה צריך להוכיח בשלב האינדוקציה.

פתרון. נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה כולל בדיקה עבור ארבעה מקרים: $n=12,13,14,15$. קל לראות שניתן להציג את הערכים הנ"ל בצורה $n=4x+5y$. אכן, $12=3\cdot4+0\cdot5$, $13=2\cdot4+1\cdot5$, $14=1\cdot4+2\cdot5$ ו- $15=0\cdot4+3\cdot5$. בשלב האינדוקטיבי, יהיה ברור מדוע בדקנו עבור ארבעה מקרים.

יהי $n\geq16$ (את המקרים $12\leq n<16$ הוכחנו בשלב הבסיס). נניח את נכונות הטענה עבור כל $12\leq k<n$, ונוכיח את הטענה ל-n. נשים לב כי $12\leq n-4<n$, ולכן לפי הנחת האינדוקציה הטענה נכונה עבור $n-4$. כלומר ישנם x,y שלמים לא שליליים, כך ש-$n-4=4x+5y$. מכאן שאפשר להציג את n בצורה $n=4(x+1)+5y$, ולפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל $n\geq12$.

נמשיך עם כמה הערות: הבדיקה בשלב הבסיס היא הכרחית עבור $n=15$. הרי, אם היינו מנסים לבדוק את נכונות הטענה לפי שלב האינדוקציה, היינו מקבלים כי את $15-4=11$ ניתן להציג בצורה $11=4x+5y$, וזה בלתי אפשרי. עבור $n=13$ או $n=14$, דווקא אפשר להראות עם $n-4$.

שימו לב שלעיתים ניתן להציג מספר n בכמה דרכים שונות כסכום של כפולה של 4 וכפולה של 5. למשל, את $n=25$ ברור כי ניתן להציג כ-$25=5\cdot5$. אך אם "נריץ" את ההוכחה לעיל עבור $n=25$, נקבל בשלב הראשון כי את $n-4=21$ ניתן להציג כסכום של כפולה של 4 וכפולה של 5. אחר את $21-4=17$ ולבסוף נגיע לשלב הבסיס שאת $17-4=13$ ניתן להציג. לכן, הצורה שההוכחה לעיל מוצאת עבור $n=25$ היא $25=4\cdot4+1\cdot5$. באופן כללי הוכחה זאת מראה כי ניתן לשלם כל סכום של 12 אגורות או יותר רק עם בולים של 4 אגורות ושל לכל היותר שלושה בולים של 5 אגורות.

בהצלחה!