

תרגיל בית 5 - פתרון

1. (משפט לוסין) תהי $f = 1_A$ פונקצית דריכלה בקטע $[0, 1]$, כלומר, $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה סגורה F (מצאו את F ממש) בקטע $[0, 1]$ כך שהצמצום של f על F הינה פונקציה רציפה ומתקיים $m([0, 1] \setminus F) < \varepsilon$.

פתרון: נגדיר את סדרת הרציונאליים ב $\mathbb{R}$ $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ונגדיר את הקטע $I_i = (q_i - \varepsilon 2^{-i-1}, q_i + \varepsilon 2^{-i-1})$, ברור כי $m(I_i) = \varepsilon 2^{-i}$ וכי $m\left(\bigcup_i I_i\right) \leq \sum_i m(I_i) = \varepsilon$. נגדיר את $F = [0, 1] \setminus \bigcup_i I_i$ ונשים לב כי, כי הקבוצה F סגורה ואינה מכילה רציונאליים ומכיון ש $m(F) = m\left([0, 1] \setminus \bigcup_i I_i\right) > 1 - \varepsilon$ נובע ש $m([0, 1] \setminus F) < \varepsilon$. בנוסף הצמצום של f על F הינה פונקציה קבועה ולכן רציפה. מכאן ש F הינה הפונקציה הנדרשת.

2. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dm = 0$.

רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

פתרון: אנו יודעים כי מכיון ש f אינטגרבילית אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימת פונקציה g רציפה אשר מתאפסת מחוץ לקטע חסום כך ש $\int |f(x) - g(x)| dm < \varepsilon$. נבנה סדרה g_n של פונקציות רציפות כאלו כך ש $\int |f(x) - g_n(x)| dm < \frac{1}{2^{n+1}}$. מכאן נובע כי

$$\begin{aligned} & \int |f(x-h) - f(x) - (g_n(x-h) - g_n(x))| dm \\ & \leq \int |f(x-h) - g_n(x-h)| dm + \int |f(x) - g_n(x)| dm < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

עכשיו, נשים לב כי מכיון ש $|g_n(x-h) - g_n(x)| < |g_n(x-h)| + |g_n(x)|$, עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת ורציפות הפונקציה g נובע כי

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |g_n(x-h) - g_n(x)| dm \\ & = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} |g_n(x-h) - g_n(x)| dm = \int_{\mathbb{R}} 0 dm = 0 \end{aligned}$$

מכאן ש

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dm < \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |g_n(x-h) - g_n(x)| dm + \frac{1}{2^n}$$

$$= 0 + \frac{1}{2^n}$$

נשאיף את n לאינסוף ונקבל את תהתוצאה.

3. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות אי-שליליות f_n השואפות לאפס נקודתית כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = 0$ אבל לא

קיימת פונקציה אינטגרבילית g לכל $f_n < g$.

פתרון: ניקח את סדרת הפונקציות הבאות:

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n-1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

קל לראות כי $f_n \rightarrow 0$ וגם כי $\int f_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. אם $f_n < g$, אזי בהכרח $\int f_n < \int g$ לכל n . מכאן ש

$$\int_{\mathbb{R}} g dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} g 1_{\{n-1 \leq x \leq n\}} dm \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} dm = \infty$$

4. הפעילו את למת פאטו עבור מידת לבג על הממשיים על הסדרות הבאות:

$$1_{(n,n+1)}(x) \quad .i$$

$$1_{(n,\infty)}(x) \quad .ii$$

$$n 1_{\left(0, \frac{1}{n}\right)}(x) \quad .iii$$

$$1 + \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{2^n x}{2\pi} \right) \right) \quad .iv$$

פתרון:

$$\liminf \int 1_{(n,n+1)}(x) = m((n,n+1)) = 1 \geq \int \liminf 1_{(n,n+1)}(x) = \int 0 = 0 \quad .i$$

$$\liminf \int 1_{(n,\infty)}(x) = m((n,\infty)) = \infty \geq \int \liminf 1_{(n,\infty)}(x) = \int 0 = 0 \quad .ii$$

$$\liminf \int n 1_{\left(0, \frac{1}{n}\right)}(x) = nm \left(\left(0, \frac{1}{n}\right) \right) = 1 \geq \int \liminf n 1_{\left(0, \frac{1}{n}\right)}(x) = \int 0 = 0 \quad .iii$$

.iv

$$\begin{aligned} \int 1 + \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{2^n x}{2\pi} \right) \right) &= \int 0 \cdot 1_{\{x: \sin \left(\frac{2^n x}{2\pi} \right) < 0\}} + 2 \cdot 1_{\{x: \sin \left(\frac{2^n x}{2\pi} \right) > 0\}} \\ &= \int 2 \cdot 1_{\{x: \sin \left(\frac{2^n x}{2\pi} \right) > 0\}} = 2m \left(\{x: \sin \left(\frac{2^n x}{2\pi} \right) > 0\} \right) = 2 \cdot \infty = \infty \end{aligned}$$

מצד שני,

מכיוון שלכל x

5. תהי $f \geq 0$ פונקציה מדידה לבג כך ש $\int f dm = \infty$. הראו שלכל $M > 0$ קיימת פונקציה g כך ש

$0 \leq g \leq f$ המקיימת:

i. $\int g dm > M$

ii. g חסומה

iii. לתומך של g מידה סופית.

פתרון: נסתכל על הפונקציה $f(x) \cdot 1_{[-n,n] \cap \{f \leq n\}}(x) = g_n(x)$. קל לראות כי לכל $n \in \mathbb{N}$ g_n מקיימת את שני הסעיפים האחרונים. הסעיף הראשון נובע מההתכנסות המונוטונית.