מימין או משמאל
לזינה.
$(n-1)!$

3. כמה מספרים שונים בני 4 ספרות ניתן ליצור מיחידות הלגו הבאות:

8,8,6,5,3,2?

פתרון: נבחין באפשרויות הבאות:

א. 8 מופיע פעמיים.

נבחר שני מקומות למקם את ה8, ובמקומות האחרים נשים ספרות

אחרות: $3 * 4 * \overbrace{\binom{4}{2}}^{\text{בחירת מקומות}}$

ב. 8 מופיע לכל היותר פעם אחת.

נשים 8 אחד בצד, ואז מהספרות הנותרות נבחר 4 ונסדר אותן:

$\overbrace{\binom{5}{4}}^{\text{בחירת ספרות}} * 4! = 5!$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

לכן התשובה הסופית היא $\binom{4}{2} * 4 * 3 + 5!$

4. בכמה אפשרויות שונות ניתן לחלק קבוצה של $2n$ אנשים לn זוגות?

פתרון: נסדר את כולם בשורה כדי ליצור זוגות, ונחלק בסידורים הפנימיים

של הזוגות ובסידור הפנימי של כל הזוגות: $\frac{(2n)!}{2^n n!}$

דוגמא: עבור 3 או $n = 2$.

5. בקרטון נמצאות 50 נורות מתוכן 15 מקולקלות. אדם שולף באופן אקראי 3 נורות מהקרטון. כמה אפשרויות לשליפה ישנן שבהן בידו לפחות נורה תקינה אחת?

א. נשתמש בשיטת המשלים: נחשב את סך כל אפשרויות הבחירה ונחסיר את האפשרויות שכל הנורות שהוא בחר תקולות:

$\binom{50}{3} - \binom{15}{3}$

$\binom{50}{3} - \binom{15}{3}$

ב. אפשרות אחרת: או שכל הנורות שהוא בחר תקינות, או שרק אחת תקינה, או ששתיים תקינות: $\binom{15}{2}\binom{35}{1}+\binom{15}{1}\binom{35}{2}+\binom{35}{3}$

6. בספינה תועה נמצאו 20 ילדים. הילדים אינם זוכרים את ימי הולדתם ומעוניינים לקבל יום הולדת.

א. מה מספר האפשרויות לחלק להם ימי הולדת כך שבדיוק 2 ילדים יקבלו יום זהה ו18 ילדים יקבלו כל אחד יומולדת משלו?

<u>פתרון:</u> נבחר את 2 הילדים, ואז נבחר 19 ימי הולדת שונים(אחד לשני הילדים ועוד 18 לילדים האחרים): $\binom{20}{2}\binom{365}{19}19!$

(אפשר גם $\frac{365!}{346!}*\binom{20}{2}$)

ב. מה מספר האפשרויות לחלק להם ימי הולדת כך שיהיה לפחות יום אחד בשנה שאותו יחגגו שני ילדים?

<u>פתרון:</u> נבחר את סך כל אפשרויות הבחירה של ימי הולדת ונחסיר את האפשרויות שאין שני ילדים עם אותו יום הולדת:

$$365^{20}-\underbrace{\frac{365!}{345!}}_{=\binom{365}{20}20!}$$

7.

א. כמה מילים שונות ניתן ליצור תוך שימוש בכל האותיות $ABRACADABRA$?

A-5 פעמים, B-פעמיים, C-פעם אחת, D-פעם אחת, R-פעמיים.

נחשב את כל הסידורים ונחלק בסידורים הפנימיים: $\frac{11!}{5!2!2!}$

דרך נוספת: לבחור בכל שלב מקומות לכל אות:

$$\binom{11}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$$

8. בוחרים ועד מקרי בן שלושה אנשים מתוך 6 עורכי דין ו5 מהנדסים. מה מספר האפשרויות שהועד יהיה מורכב

א. משני עורכי דין ומהנדס אחד?

$$\binom{6}{2}\binom{5}{1}$$

ב. מעורך דין אחד לפחות?

$$\binom{11}{3}-\binom{5}{3}=\binom{6}{3}+\binom{6}{1}\binom{5}{2}+\binom{6}{2}\binom{5}{1}$$

ג. רק מעורכי דין?

$$\binom{6}{3}$$

תרגיל 1. מהו מספר האפשרויות לסדר n אנשים כאשר ראובן ושמעון סמוכים?

פתרון: **דרך א':**

נסדר ללא ראובן (מחכה בצד)

לשמעון בסידור יש $(n-1)!$ אפשרויות.

לכל אפשרות כזו ניתן לצרף את ראובן מימין או משמאל לשמעון, כ"א 2 אפ'.

ומכה"כ:

$$\boxed{2\cdot(n-1)!}$$

דרך ב': נקח את ראובן ושמעון כבלוק (כ"א איש אחד)

כעת יש $(n-1)!$ אפ' לסידור.

לאחר מכן בתוך הבלוק יש 2 אפ' לסידור ראובן ושמעון.

ומכאן

$$\boxed{2\cdot(n-1)!}$$

ב. כנ"ל רק שראובן, שמעון ולוי יעמדו בסמיכות?

בדרך ב' בלוק של השלושה,

$$3!\cdot(n-2)!$$

$3!$ – סידור פנימי בבלוק

$(n-2)!$ – סידור כולל של הבלוק

ג. כנ"ל רק שראובן ושמעון לא סמוכים?

דרך א': ללא שמעון יש $(n-1)!$ אפ'

לכל אפשרות ניתן לצרף את שמעון

ב- $n-2$ אפשרויות כך שלא יהיה

ליד ראובן.

$$\Rightarrow \boxed{(n-2)\cdot(n-1)!}$$

דרך ב': "עיקרון החיסור"

מס' אפ' שראובן ושמעון לא סמוכים = סה"כ אפ' לסידור n אנשים − מס' אפ' כך ששמעון וראובן סמוכים

$$= n! - 2\cdot(n-1)! = \boxed{(n-1)!\,(n-2)}$$

תרגיל: מהו מספר האפ' לזכיה בלוטו?

* יש לנחש 6 מס' מתוך 1-37
* המספר הנוסף הינו מספר מתוך 1-7.

פתרון:

$\underbrace{\overline{37}\ \overline{36}\ \overline{35}\ \overline{34}\ \overline{33}\ \overline{32}}\ \ \overline{\ \ }$ החזק

$$\binom{37}{6} = \frac{37!}{6!(37-6)!} \cdot 7$$

הסידורים של 6 הנ"ל

אין חשיבות לסדר

$$= \boxed{16,273,488}$$

C^{6}_{37}

בלי חזרה וללא חשיבות לסדר.

הסיכוי (ההסתברות) לזכות עם מילוי טור בודד הינו

$$\frac{1}{16,273,488} \approx 0.0000000615$$

בשנת 2018 מתו 316 תושבים בישראל בתאונות דרכים.

אוכלוסייה סוף 2018 $\approx$ 8,972,000

לכן $\frac{1}{28,392} \approx 0.0000352$

לכן יש סיכוי גבוה יותר למות (לא עלינו 🙂) בתאונת דרכים מלזכות בלוטו.

"קחו בחשבון כשאתם עומדים לנסוע למלא טופס לוטו"

"מפגן דוידסון"

שאלה: האם עדיף לנחש 7 מס' בלוטו מתוך 37-1, מאשר האפ' הנוכחית עם המס' החזק ?

תשובה: כן !

מס' האפ' כעת הנו

$$\binom{37}{7} = 10,295,472$$

אשר מגדיל את הסיכוי לזכות.

1

תרגיל: כמה מחרוזות בינאריות יש עם 3 ספרות?

פתרון: מדובר בבחירה עם חשיבות לסדר ועם חזרה,

סה"כ נקבל $2^3=8$ אפשרויות

PP_n^k

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

תרגיל: כמה "מילים" (לא חייב שיהיה משמעות) בנות 4 אותיות ניתן לבנות מה- A, B, C, כאשר אסור שבמילה תופיע אותה אות יותר מפעם אחת?

פתרון: מדובר בבחירה עם חשיבות לסדר וללא חזרה.

בחירה של 4 איברים מתוך $\{A, B, C, \ldots, Z\}$

נקבל P_n^k

$$\text{אפשרויות} = \frac{26!}{(26-4)!} = \frac{26!}{22!} = 26\cdot25\cdot24\cdot23 = 358{,}800$$

טענה:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

הוכחה:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$\blacksquare$

תרגיל: יהיו $k, n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \le k \le n$

הוכח:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

פתרון: $a=1$, $b=-1$ בבינום של ניוטון. $\blacksquare$

Scanned by CamScanner

דוגמא

k עצמים מתוך n
בלי חשיבות לסדר ועם חזרה.

צריך 7 קוביות צבע.

איך קבלנו למשל

$K=7$
$n=6$

22 32163

CC_n^k

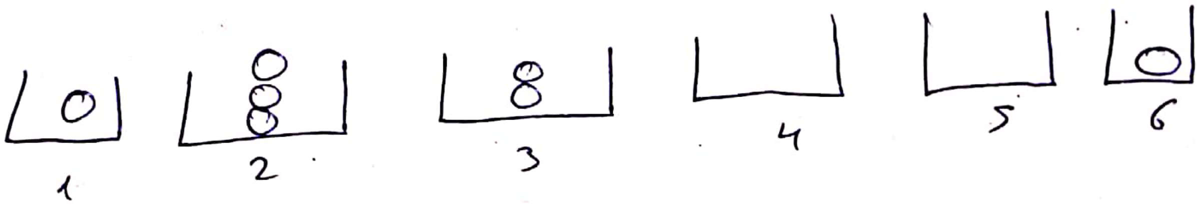
הסדר לא חשוב ולכן התוצאה זהה

?

1 222336

(תאים) כדורים ומחיצות → תוצאת הקוביה

רצף בינארי
010001001110



$$\text{מס' האפש'} = \binom{6+7-1}{7} = \binom{12}{7} = \boxed{792}$$

PP_n^k

אם הקוביות היו שונות (למשל צבעים שונים או ממוספרות) אזי הייתה חשיבות לסדר ועם חזרה.

$$\underset{6}{\uparrow}\_\ \underset{6}{\uparrow}\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \overset{7}{6} = \boxed{6^7}$$

...