# תרגיל 1

1. הגדרה: נגיד שחוג $R$ הוא חוג עם חילוק אם כל איבר שונה מ0 הפיך.

   (א) הוכיחו שכל תחום סופי (כלומר, שמס' האיברים בו סופי) הוא חוג עם חילוק.

   (ב) יהי $R$ חוג עם חילוק, ו$S \subseteq R$ תת חוג. הוכיחו ש$S$ תחום.

   (ג) תנו דוגמא לחוג עם חילוק $R$ ו$S \subseteq R$ תת חוג, כך ש$S$ אינו חוג עם חילוק.

   פתרון:

   i. יהי $R$ סופי ויהי $x \in R$. נסתכל על אוסף החזקות הטבעיות של $x$: $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$. מכיוון ש$R$ סופי, יש $m < n$ כך ש$x^m = x^n$. מתכונות הצמצום של תחום נקבל $x^{n-m} = 1$. לכן $x$ הפיך, וההופכי שלו הוא $x^{n-m-1}$.

   ii. י נויכח שאין מחלקי 0 שונים מ0 ב$S$. יהי $0 \neq x \in S$. יהי $y \in S$ כלשהוץ נניח ש$xy = 0$. בפרט, זה קורה גם ב$R$. יהי $z$ ההופכי של $x$ ב$R$. $\implies zxy = 0$ $y = 0$.

   iii. נקח $R = \mathbb{Q}, S = \mathbb{Z}$.

2. נגד שחוג $R$ הוא בוליאני אם לכל $x \in R$ מתקיים: $x^2 = x$.

   (א) תנו דוגמא לחוג בוליאני.

   (ב) הוכיחו שבכל חוג בוליאני מתקיים: $1 + 1 = 0$.

   (ג) הוכיחו שכל חוג בוליאני הוא קומוטטיבי.

   פתרון:

   i. $(P(X), \triangle, \cap, \emptyset, X)$

   ii. $1 + 1 = 0 \implies (1+1) = (1+1)^2 = 1+1+1+1$.

   iii. יהי $R$ חוג בוליאנית ויהיו $x, y \in R$. $x+y = (x+y)^2 = (x+y)(x+y) =$
   $x^2 + yx + xy + y^2 = x + xy + yx + y$
   לכן $yx + xy = 0$
   אבל גם $xy + xy = 0$. הסבר: $xy + xy = (1+1)xy = 0 \cdot xy = 0$.
   הנגדי הוא יחיד, ולכן $xy = yx$.

3. יהי $R = (P(X), \triangle, \cap, \emptyset, X)$ החוג מהתרגול. תנו דוגמא לתת חוג בלי יחידה $S \subseteq R$, שאין בו את היחידה של $R$. האם יש לו יחידה? האם קיים ל$R$ תת חוג (כלומר, עם היחידה של $R$)?

   פתרון:

   יהי $\emptyset \neq A \subseteq X$. אזי $P(A) \subseteq P(X)$. ברור ש$(P(A), \triangle, \cap, \emptyset)$ הוא תת חוג בלי יחידה. יש לו יחידה משלו- $A$.

   $\{X, \emptyset\}$ הינו תת חוג של $R$.

4. יהי $R$ חוג ו$\{S_i | i \in I\}$ משפחה של תת חוגים. הוכיחו ש$\bigcap_{i\in I} S_i$ הוא תת חוג.
פתרון:

נוכיח סגירות לחיבור, כפל ונגדי.

יהיו $x, y \in \bigcap_{i\in I} S_i$.

חיבור: לכל $i$, $x, y \in S_i$. לכן $x + y \in S_i$, ומכאן ש$x + y \in \bigcap_{i\in I} S_i$.

כפל: לכל $i$, $x, y \in S_i$. לכן $xy \in S_i$, ומכאן ש$xy \in \bigcap_{i\in I} S_i$.

נגדי: לכל $i$, $-x \in S_i$, ומכאן ש$-x \in \bigcap_{i\in I} S_i$.

בנוסף, יהי $1$ איבר היחידה של $R$. לכל $i$ $1 \in S_i$ ולכן $1 \in \bigcap_{i\in I} S_i$.

5. יהי $R$ חוג שבו כל איבר שונה מ0 הפיך מימין. הוכיחו ש$R$ הוא חוג עם חילוק.
פתרון:

יהי $0 \neq x \in R$. קיים $y \in R$ כך ש$xy = 1$. כעת עבור $y$ קיים $z \in R$ כך ש$yz = 1$. נוכיח ש$x = z$: $x = x \cdot 1 = x(yz) = (xy)z = 1 \cdot z = z$. לכן $y$ הוא הופכי ימני ושמאלי של $x$, כלומר, $x$ הפיך.

6. יהי $R$ חוג חילופי, ויהיו $x, y \in R$. הוכיחו שאם $xy$ הפיך, אז גם $x$ וגם $y$ הפיכים. הפריכו זאת במקרה הלא חילופי.
פתרון:

מקרה ראשון: $R$ חוג קומוטטיבי. יהיו $x, y \in R$ כך ש$xy$ הפיך. כלומר, קיים $z \in R$ כך ש$1 = (xy)z = z(xy)$. אזי: $1 = x(yz)$. אבל החוג קומוטטיבי ולכן גם $1 = (yz)x$. כלומר, $x$ הפיך וההופכי שלו הוא $yz$ץ

כעתת נביא דוגמא נגדית לחוג לא קומוטטיבי.

יהי $V = \mathbb{R}^\infty$ ו$R = End(V)$ חוג האנדומורפיזמים של $V$, כלומר, העתקות לינאריות מ$V$ ל$V$, עם חיבור רכיב-רכיב וכפל כהרכבה. אתה מוזמנים לבדוק שזה אכן חוג. איבר ה0 הוא העתקת ה0 (ההעתקה ששולחת הכל ל0) ואיבר היחידה הוא העתקת הזהות.

נסכל על שתי ההעתקות הבאות:

$$T(x_1, x_2, x_3 ...) = (0, x_1, x_2, x_2, ...)$$

$$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...)$$

קל לראות שהן אכן העתקות לינאריות. כמו כן, $S \circ T = id$, בפרט הפיך. אבל $S$ ו$T$ אינן הפיכות, כי $T$ לא על ו$S$ לא חח"ע.