

לינארית תרגול 9

21 בדצמבר 2020

מרחבי המטריצה: בהינתן מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אנחנו נחפש שלושה תתי מרחבים:

- מרחב העמודות: $C(A) = \text{span} \{C_i(A) : 1 \leq i \leq n\} \leq \mathbb{F}^m$
- מרחב השורות: $R(A) = \text{span} \{(R_i(A))^t : 1 \leq i \leq m\} \leq \mathbb{F}^n$
- מרחב האפס: $N(A) = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$

איך מוצאים בסיס למרחבים אלו?

1. מדרגים את המטריצה לצורה קנונית. ואז:

(א) עמודות **במטריצה המקורית** המתאימות לעמודות עם משתנה מוביל במדורגת, הן בסיס למרחב העמודות. הסיבה: מרחב העמודות עלול להיהרס בדירוג. למשל:

$$\begin{pmatrix} & & \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

(ב) שורות במטריצה המדורגת שאינן שורת אפסים מהוות בסיס למרחב השורות. הסיבה: מרחב השורות נשמר בדירוג.

(ג) מציאת פתרונות יסודיים נותן בסיס למרחב האפס.

לדוגמא: מצאו בסיס למרחבי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נדרג:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{3,4,5}-R_1 \rightarrow R_{3,4,5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow[\substack{R_3+2R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4-R_2, R_5+R_2}]{R_5-R_3 \rightarrow R_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4-\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_4}]{R_5-R_3 \rightarrow R_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ולכן:

$$C(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגילים:

1. כאשר נותנים לנו וקטורי עמודה בת"ל ומבקשים להשלים לבסיס של מרחב מסויים (נניח $\mathbb{R}^7$). מה לעשות?

כאן כדאי לשים אותם בשורות מטריצה, ואז הדירוג לא הורס את המרחב, ולאחר הדירוג נוכל להוסיף בקלות וקטורי יחידה המתאימים למשתנים החופשיים. למשל: השלימו את

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

לבסיס של $\mathbb{C}^4$: נשים בשורות מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1-i & 2+i & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1+4i & 5 \end{pmatrix}$$

כעת, כיון שמרחב השורות לא נהרס בדירוג נקבל:

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1+4i \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת, קל לראות שניתן להוסיף את e_2, e_4 (כי בהם אין איבר מוביל).

2. כאשר נותנים לנו וקטורי עמודה ואומרים שהם פורשים את $\mathbb{R}^n$, ומבקשים למצוא תת קבוצה המהווה בסיס למרחב.

פתרון: נשים אותם בעמודות מטריצה, ובעצם אנחנו מחפשים בסיס למרחב העמודות מתוך העמודות המקוריות - זה בדיוק מה שהתהליך נותן. נדרג, וניקח את העמודות המקוריות המתאימות לאיבר מוביל. למשל:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו תת קבוצה של S המהווה בסיס ל $\mathbb{R}^5$. נשים בעמודות מטריצה ונדרג. נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לפי מה שלמדנו עמודות מהמקורית המתאימות לאיברים מובילים מהוות בסיס למרחב העמודות, ולכן נוכל לקחת את עמודות 1, 2, 3, 4, 6 של המקורית וסיימנו. כלומר, הבסיס הוא:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ עם $\text{rank}(A) = r$. הוכיחו שיש תת-מטריצה של A ריבועית מסדר r שהיא הפיכה.
פתרון: נעשה זאת בשני שלבים:

(א) כיון ש- $\text{rank}(A) = r$ זאת אומרת שיש r שורות בת"ל. נסתכל על המטריצה רק עם שורות אלה (נזרוק את השאר). קיבלנו מטריצה $A' \in \mathbb{R}^{r \times n}$.
(ב) כעת, כיון של- A' יש r שורות בת"ל, נקבל $\text{rank}(A') = r$, ולכן יש לה r עמודות בת"ל. ניקח את העמודות הללו ונקבל מטריצה $A'' \in \mathbb{R}^{r \times r}$ שכל שורותיה (וכל עמודותיה) בת"ל ולכן הפיכה.

4. תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הוכיחו: $R(AB) \subset R(B)$.
פתרון: לפי כפל שורה: יהי $v \in R(AB)$ זאת אומרת

$$v = \sum_{k=1}^n \alpha_k R_k(AB) = \sum_{k=1}^n \alpha_k R_k(A) \cdot B = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \left(\sum_{j=1}^n A_{kj} R_j(B) \right)$$

כי:

$$R_k(A) \cdot B = \sum_{j=1}^n A_{kj} R_j(B)$$

קיבלנו צירוף לינארי של שורות B . כמו לכתוב ככה:

$$\alpha_1 \cdot (A_{11}R_1(B) + A_{12}R_2(B) + \cdots + A_{1n}R_n(B)) +$$

$$\alpha_2(A_{21}R_1(B) + A_{22}R_2(B) + \cdots + A_{2n}R_n(B)) +$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} & \alpha_n(A_{n1}R_1(B) + \cdots + A_{nn}R_n(B)) = \\ & = (\alpha_1A_{11} + \alpha_2A_{21} + \cdots + \alpha_nA_{n1})R_1(B) + \cdots = \\ & \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k A_{k1}\right) R_1(B) + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k A_{k2}\right) R_2(B) + \cdots + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k A_{kn}\right) R_n(B) \\ & \text{לכן זה צ"ל של שורות } B, \text{ ולכן } v \in R(B) \end{aligned}$$

5. תזכורת לגבי כפל עמודה:

$$C_j(AB) = AC_j(B) = \sum_{i=1}^n C_i(A) \cdot B_{ij} = \sum_{i=1}^n B_{ij} C_i(A)$$

נסכם: השורה ה- i של AB זה צ"ל של שורות B . העמודה ה- j של AB זה צ"ל של עמודות A