תרגיל בית 11 – טופולוגיה

שאלה 1

יהיו (X_i,τ_i) מרחבים טופולוגיים דיסקרטיים לכל $i\in I$. האם מרחב המכפלה $\prod_{i\in I} X_i$ דיסקרטי?

רמז: תלוי.

שאלה 2

יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה.

שאלה 3

יהי X מרחב טופולוגי ותהי I קבוצת אינדקסים. נסמן ב- X^I את מרחב המכפלה $\prod_{i\in I} X$. לכל $x\in X$ נגדיר $f_x\in X^I$ להיות הווקטור האינסופי שכל רכיביו הם x. נסמן $Y=\{f_x \mid x\in X\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ- X^I. הוכיחו כי X הומיאומורפי ל- Y.

שאלה 4

הוכיחו שמכפלת מרחבי T_1 היא מרחב T_1.

שאלה 5

א. יהי X מ"ט דיסקרטי עם בסיס B. הוכיחו שלכל $x\in X$ מתקיים $\{x\}\in B$.

ב. יהי X מ"ט עם בסיס B, Y קבוצה ו- $f:X\to Y$ פונקציה **על**.

הוכיחו/הפריכו:

$B'=\{O\subseteq Y: f^{-1}(O)\in B\}$ בסיס לטופולוגיית המנה על Y.

ג. יהי $\mathbb{R}_l$ הישר של סורגנפריי ותהי $f:\mathbb{R}_l\to\mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם.

מצאו את טופולוגיית המנה τ על $\mathbb{Z}$ ביחס ל- f.

שאלה 6

נתבונן ב- $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית ובפונקצית הערך השלם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$.

נסמן ב- τ את טופולוגיית המנה על $\mathbb{Z}$ ביחס ל- f .

א. הוכיחו שמתקיים $A\in\tau \Leftrightarrow$ אם $n\in A$ אז $n-1\in A$.

ב. הסיקו כי $\tau=\{\varnothing,\mathbb{Z}\}\cup\{(-\infty,M]\cap\mathbb{Z}:M\in\mathbb{Z}\}$.

שאלה 7

א. יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y,\ g:Y\to X$ רציפות ומתקיים $f\circ g=id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.

ב. תהי $f:X\to Y$ העתקת מנה. הוכיחו כי f הומיאומורפיזם $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

בהצלחה!