תרגיל בית 5

שאלה 1

הגדרה: יהי $\left(X,\|\ \|\right)$ מרחב נורמי. נאמר ש- $A\subseteq X$ חסומה בנורמה אם קיים $M\in\mathbb{R}$ $0<M$ כך ש- $\|x\|\le M$: $\forall x\in A$.

תהיינה $\|\ \|_1,\|\ \|_2$ נורמות שקולות מעל מרחב וקטורי X (כלומר קיימים $a,b>0$ כך שלכל $x\in X$, $\|x\|_1\le a\|x\|_2\wedge\|x\|_2\le b\|x\|_1$).

א. תהי A חסומה ב- $\left(X,\|\ \|_1\right)$. הוכיחו ש- A חסומה ב- $\left(X,\|\ \|_2\right)$.

ב. תהי A חסומה ב- R^2 עם המטריקה האוקלידית. האם A חסומה בהכרח

ב- $\left(\mathbb{R}^2,d_{\max}\right)$? הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית.

ג. תהי d מטריקה שקולה למטריקה האוקלידית ונניח ש- A חסומה ב- $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$. האם A חסומה בהכרח ב- $\left(\mathbb{R}^2,d_{\max}\right)$? הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית.

(כל הריבועים זה R)

שאלה 2

תהי X קבוצה. נתבונן באוסף $T_\infty=\{U\subseteq X : X-U \text{ is infinite}\}\cup\{\varnothing,X\}$ (כלומר כל תתי הקבוצות של X בעלות משלים אינסופי, יחד עם הקבוצה עצמה והמרחב כולו). הוכיחו/הפריכו: T_∞ מהווה טופולוגיה על X.

שאלה 3

א. נתבונן ב- R ובתת קבוצה שלו $S=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. נאמר ש- $C\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C=A\bigcup T$ כאשר: A היא תת קבוצה סגורה של R <u>בטופולוגיה האוקלידית</u>, ו- T היא תת קבוצה כלשהי של S. הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על R.

<u>הדרכה</u>: קודם כל, תוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י כך שתראו את שלוש התכונות על קבוצות סגורות (ולא הפתוחות). שנית, כאשר תבדקו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור, היעזרו בכך שמתקיים:

$$C=\bigcap_{i\in I}\left(A_i\bigcup T_i\right)=\bigcap_{i\in I}A_i\bigcup\left(C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i\right).$$

ב. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים N ולכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $O_n=\{n,n+1,n+2,...\}$. נסמן $\tau=\{\varnothing,\mathbb{N}\}\bigcup\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. הוכיחו:

1. $(\mathbb{N},\tau)$ מרחב טופולוגי.

2. $(\mathbb{N},\tau)$ אינו מטריזבילי.

כל הריבועים זה Z.

<u>שאלה 4</u>

תזכורת:

תהי Y קבוצה כלשהי, ותהי $p\notin Y$ ויהי $X=\{p\}\cup Y$. נגדיר $\tau=\left\{O\subseteq X : p\notin O \ \vee\ \left|O^c\right|\le\aleph_0\right\}$.

א. הוכיחו ש-(X,τ) הוא מרחב טופולוגי.

ב. נניח ש- $|X|\le\aleph_0$. הוכיחו כי $\tau=\tau_{disc}$.

ג. בתנאי סעיף ב', האם (X,τ) מטריזבילי?

<u>שאלה 5</u>

נתבונן בשני אוספים של תתי קבוצות של N: $\tau_1 = \left\{ U \subseteq \mathbb{N} \,:\, U = \varnothing \;\vee\; \left| U^C \right| < \infty \right\}$,

$\tau_2 = \left\{ U \subseteq \mathbb{N} \,:\, 1 \notin U \;\vee\; \left| U^C \right| < \infty \right\}$.

א. הוכיחו ש- τ_1, τ_2 הן טופולוגיות על N.

ב. נתבונן בשתי פונקציות $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כאשר $f = Id_{\mathbb{N}}$,

$$g(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ אי-זוגי} \\ 1 + \frac{n}{2} & n \text{ זוגי} \end{cases} .$$

האם הפונקציות הבאות רציפות (הוכיחו את תשובתכם!)

1. $f : (\mathbb{N}, \tau_1) \to (\mathbb{N}, \tau_2)$

2. $f : (\mathbb{N}, \tau_2) \to (\mathbb{N}, \tau_1)$

3. $g : (\mathbb{N}, \tau_1) \to (\mathbb{N}, \tau_2)$

4. $g : (\mathbb{N}, \tau_2) \to (\mathbb{N}, \tau_1)$

כל הריבועים זה N

<u>שאלה 6</u>

<u>תזכורת</u>

נתבונן ב-R עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. הוכיחו כי T אכן טופולוגיה.

ב. הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה על R, שנסמנה להלן ב τ (המתקבלת ע"י המטריקה הרגילה), מקיימת $\tau \subset T$ (הכלה <u>אמיתית</u>!).

ג. הוכיחו שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת בטופולוגיה של סורגנפריי.

<u>שאלה 7</u>

תהי $p \notin \mathbb{R}$ ויהי $X = \{p\} \cup \mathbb{R}$, תהי $\tau = \left\{O \subseteq X : p \notin O \ \vee \ \left|O^c\right| \leq \aleph_0\right\}$.

א. יהי Y מ"ט כלשהו. תהי $f:(X,\tau) \to Y$ פונקציה, ותהי $X \supseteq \{x_n\}$ סדרה מתכנסת: $x_n \xrightarrow{\tau} x \in X$. הוכיחו ש- $f(x_n) \to f(x)$.

ב. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי מטריזבילי Y, ופונקציה $g:(X,\tau) \to Y$ שאינה רציפה.

ג. הסיקו <u>משני הסעיפים הקודמים</u> שהמרחב (X,τ) אינו מטריזבילי.

<u>שאלה 8</u>

א. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X הכוללת את כל תתי הקבוצות האינסופיות (אך לא בהכרח רק את אלה). הראו ש- (X,τ) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

ב. יהי X מצוייד בטופולוגיה הקו-סופית. נניח שקיימות במרחב לפחות 3 קבוצות סגוחות. הראו ש- X סופית.

ג. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X עם התכונה הבאה: הקבוצה האינסופית היחידה שהיא פתוחה היא X עצמה. האם τ היא בהכרח הטופולוגיה הטריוויאלית? נמקו את תשובתכם.

תזכורת: קבוצה סגוחה היא קבוצה שהיא גם סגורה וגם פתוחה.

בהצלחה!