בס"ד

# תרגול מס' 7 בחשבון אינפי 2

## התכנסות בהחלט.

**הגדרה:** בהינתן אינטגרל לא אמיתי $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ אנו נאמר כי הוא ***מתכנס בהחלט*** אם האינטגרל $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ מתכנס, ונאמר כי הוא ***מתכנס בתנאי*** אם הוא מתכנס אך $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ מתבדר.

**משפט קושי:** אינטגרל המתכנס בהחלט מתכנס.

**דוגמה:** עפ"י מבחן ההשוואה הראשון ניתן לראות כי האינטגרל $\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ מתכנס ולכן עפ"י משפט קושי גם $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ מתכנס. נאמר עליו שהוא מתכנס בהחלט.

**דוגמה:** ראינו בתרגול שעבר עפ"י משפט דיריכלה כי גם $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס. באותו האופן מראים גם עבור $\int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ שהוא מתכנס. אבל ההתכנסות של $\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ היא רק בתנאי, שכן:

$$\forall x \in [a,\infty): 0 \le \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{\sin^2 x}{x} \le \left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

וסכום האינטגרלים $\int_a^{\infty} \frac{dx}{2x} - \int_a^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ הוא של מתבדר פחות מתכנס ולכן בסה"כ הסכום מתבדר

(כאן אין להסתפק בטיעון שאין קיזוז אינסופי שכן מדובר באותו המקטע).

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שני.

תהא $f(x)$ פונקציה מוגדרת ולא חסומה בקטע חצי פתוח $[a,b)$ ונניח לכל $\varepsilon>0$ , $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b-\varepsilon]$, כך ש- $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$ . לכל $\varepsilon>0$ נתון כי האינטגרל בקטע $[a,b-\varepsilon]$ קיים ולכן נוכל להגדיר את: $I(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ .

**הגדרה:** הגבול $I=\lim_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon)$ נקרא **האינטגרל הלא-אמיתי** של $f(x)$ בקטע $[a,b)$ ומסומן ע"י: $I=\int_a^b f(x)dx$ . אם הגבול קיים, נאמר כי האינטגרל הלא-אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b)$ **מתכנס.** אחרת נאמר כי הוא **מתבדר.**

באופן דומה, תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת ולא חסומה בקטע $(a,b]$ ונניח כי לכל $\varepsilon>0$ , $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a+\varepsilon,b]$. נגדיר $J(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ . הגבול $J=\lim_{\varepsilon\to 0^+} J(\varepsilon)$ נקרא **האינטגרל הלא-אמיתי** של $f(x)$ בקטע $(a,b]$ ומסומן גם כן ע"י: $I=\int_a^b f(x)dx$ . אם הגבול קיים, נאמר כי האינטגרל הלא-אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b)$ **מתכנס.** אחרת נאמר כי הוא **מתבדר.**

**תכונות חשובות:**

א. תהי $f(x)$ פונקציה ונניח כי לכל $\varepsilon>0$, $f(x)$ אינטגרבילית בקטעים $[a,c-\varepsilon)$ ו- $(c+\varepsilon,b]$.
נניח כי $f(x)$ אינה חסומה בסביבת הנקודה $c$ כך ש: $\lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$ או $\lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$ .

אם קיימים הגבולות: $I_2=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ $\qquad$ $I_1=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx,$

אז נאמר כי האינטגרל הלא-אמיתי של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ מתכנס, וערכו הוא: $\int_a^b f(x)dx=I_1+I_2$ .

ב. מספיק שאחד מהאינטגרלים: $I_1,I_2$ בסעיף א' יתבדר, כדי שהאינטגרל באגף שמאל יתבדר (ולכן כדי להוכיח התבדרות מספיק למצוא נקודה אחת כזו).

ג. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$ .

---

**תרגיל:** חשב: $\int_0^1 \ln x\,dx$ .

**פתרון:** הפונקציה $\ln x$ אינה חסומה בסביבה ימנית של הראשית ולכן זהו אינטגרל לא אמיתי מסוג שני.

נבדוק האם הגבול קיים: $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[x\ln x - x\right]_\varepsilon^1 = -1-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\varepsilon$

נחשב: $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\varepsilon = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \xrightarrow{Lupital} -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon = 0$

ונקבל: $\int_0^1 \ln x\,dx = -1-0=-1$ (האינטגרל מתכנס).

---

## מבחני התכנסות.

**מבחן השוואה ראשון:** תהיינה $f,g$ אינטגרביליות ולא חסומות רק בסביבה ימנית של $a$ בקטע $(a,b]$

ומתקיים: $\forall x\in(a,b]:\ 0\le g(x)\le f(x)$ . אזי: $\int_a^b f(x)\,dx$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ מתכנס.

**מבחן ההשוואה השני (הגבולי):** נניח כי $f,g$ הן אי-שליליות ואינן חסומות רק בסביבה ימנית של $a$

בקטע $(a,b]$ וקיים הגבול: $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ , נסמן: $I_g=\int_a^b g(x)\,dx$ , $I_f=\int_a^b f(x)\,dx$ . אזי:

1. אם $0<L<\infty$ אזי $I_f, I_g$ מתכנסים או מתבדרים כאחד ("חברים").
2. אם $L=0$ אזי: $I_g$ מתכנס $\Leftarrow$ $I_f$ מתכנס.
3. אם $L=\infty$ אזי: $I_f$ מתכנס $\Leftarrow$ $I_g$ מתכנס.

**דוגמאות:**

1. קבע התכנסות של: $\int_0^1 \frac{dx}{1-\cos x}$. ניעזר במבחן ההשוואה הגבולי ונקבל:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1-\cos x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{1-\cos x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\sin x} = 2$$

כלומר האינטגרל שלנו "חבר" של $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ שמתבדר ולכן אף הוא מתבדר.

2. קבע התכנסות של: $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. נפצל לשני תחומים: $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

בתחום הראשון האינטגרל הוא לא אמיתי מסוג שני וחבר לזה של הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ולכן מתכנס. בתחום השני האינטגרל הוא ל"א מסוג ראשון וחבר לזה של הפונקציה $\frac{1}{x^{3/2}}$ שמתכנס ולכן בסה"כ האינטגרל כולו מתכנס.

**הערה:** גם כאן תקפה ההגדרה של התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי ומשפט קושי.

לא תמיד ניתן למצוא "חבר". למשל בדוגמה הבאה:

**תרגיל:** בדוק התכנסות של: $\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

**פתרון:** נגדיר: $g(x) = \frac{1}{x^{3/4}}$ , $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$ פונקציות אי-שליליות וניעזר במבחן ההשוואה השני:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} \cdot x^{3/4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{x^{-1/4}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \xrightarrow{Lupital} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{4}x^{-5/4}} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/4} = 0$$

כלומר $g(x)$ "יותר חזקה" מ-$f(x)$ בסביבה ימנית של הראשית וכיוון שידוע ש: $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/4}}$ מתכנס,

אז בהכרח שגם האינטגרל שלנו מתכנס.

**הערה:** ניתן לעבור מאינטגרל לא אמיתי מסוג שני לאינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון ע"י ההצבה:

$y=\frac{1}{x-a}$ , כאשר $a$ היא הנקודה בה הפונקציה שואפת ל- $\pm\infty$ .

**דוגמה:** קבע התכנסות של האינטגרל: $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}dx$ .

**פתרון:** נשים לב כי הפונקציה מקבלת ערכים חיוביים ושליליים בכל סביבה של הראשית ולכן לא נוכל להיעזר במבחני ההשוואה. נבצע המרה באמצעות ההצבה: $y=\frac{1}{x}$ ונקבל:

$$dx=-x^2dy=-\frac{dy}{y^2} \;\rightarrow\; dy=\frac{dx}{-x^2} \; .$$

כמו כן: $\begin{matrix} x\to 0^+ & \Rightarrow & y\to\infty \\ x\to 1 & \Rightarrow & y\to 1 \end{matrix}$ ומכאן: $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}dx=\int_\infty^1 \frac{\cos y}{y}dy$ .

האינטגרל האחרון מתכנס עפ"י דריכלה ולכן האינטגרל שלנו מתכנס.

כעת נרצה להראות כי האינטגרל מתכנס בתנאי:

תמיד מתקיים: $0\le\cos^2\frac{1}{x}\le\left|\cos\frac{1}{x}\right|$ . ולכן עפ"י מבחן ההשוואה הראשון מספיק להוכיח כי האינטגרל $\int_0^1 \frac{\cos^2\frac{1}{x}}{x}dx$ מתבדר. ניעזר בזהות: $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+1\right)$ ונקבל:

$$\int_0^1 \frac{\cos^2\frac{1}{x}}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x} \; .$$

האינטגרל המחובר האחרון מתבדר ובנוסף עפ"י התרגיל הקודם $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}dx$ מתכנס ולכן סכומם,

כלומר $\int_0^1 \frac{\cos^2\frac{1}{x}}{x}dx$ , בהכרח מתבדר, ובסה"כ האינטגרל שלנו מתכנס בתנאי.

---