

אנליזה מתקדמת תרגול 8

22 בדצמבר 2020

1 לוגריתם: פונקציית \ln

אחרי שראינו את הפונקציה e^z אנחנו רוצים לחשוב על הפונקציה ההפוכה. כזכור ראיתם שלכל $z \neq 0$ יש אינסוף מקורות w המקיימים $e^w = z$. אנחנו נחפש את אחד מהדברים מהבאים:

- בהינתן z נחפש את כל הערכים w המקיימים $e^w = z$.
- בהינתן z נחפש את הערך בטווח מסוים, נניח $w \in [a, a + 2\pi)$ המקיים $e^w = z$.
- בהינתן z נחפש את הערך המרכזי המקיים $e^w = z$. כלומר, הערך בטווח $(-\pi, \pi]$.

תרגילים:

$$1. \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

פתרון: נסמן את התוצאה ב- $x + yi$. כלומר:

$$e^{x+yi} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

מצד שני:

$$e^{x+yi} = e^x \operatorname{cis} y$$

בסה"כ:

$$e^x \operatorname{cis} y = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

ולכן:

$$\begin{cases} e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

ולכן כל הערכים הינם מהצורה:

$$z_k = \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) i$$

הערך המרכזי הוא:

$$z_0 = \frac{\pi}{4} i$$

ואם נתבקש ערך בטווח $(3, 3 + 2\pi]$ אז:

$$z_1 = \frac{9\pi}{4} i$$

2. $\ln(-2)$

נמצא תחילה את כל הערכים, נסמנם $x + yi$, כלומר:

$$e^x \operatorname{cis} y = e^{x+yi} = -2 = 2 \operatorname{cis} \pi$$

ולכן:

$$\begin{cases} e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \\ y = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

ולכן הערכים הם מהצורה:

$$z_k = \ln 2 + (\pi + 2\pi k) i$$

הערך המרכזי:

$$z_0 = \ln 2 + \pi i$$

והערך בטווח $[0, 2\pi)$ הוא הערך המרכזי.

3. $\ln(-2i)$

פתרון: נסמן $z = x + yi$, ונרצה:

$$e^x \operatorname{cis} y = e^{x+yi} = -2i = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$$

ולכן:

$$\begin{cases} e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \\ y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

ולכן הערכים הם מהצורה:

$$z_k = \ln 2 + \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right) i$$

והערך המרכזי:

$$z_{-1} = \ln 2 - \frac{\pi}{2} i$$

והערך בטווח $[0, 2\pi)$ הוא:

$$z_0 = \ln 2 + \frac{3\pi}{2} i$$

$$.4 \quad \ln(0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} i)$$

פתרון: נחפש $x + yi$ כך ש-

$$e^x \operatorname{cis} y = e^{x+yi} = 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

ולכן:

$$\begin{cases} e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

ולכן הערכים הם מהצורה:

$$z_k = \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) i$$

והערך המרכזי הוא:

$$z_0 = -\frac{\pi}{3} i$$

הערך בטווח $[5\pi, 7\pi)$ הוא:

$$z_3 = 5\frac{2}{3}\pi i$$