טופולוגיה
סיכום הגדרות משפטים

תקציר

סיכום משפטים זה מבוסס על הרצאותיו של ד"ר טל נוביק, אוניברסיטת בר אילן, סמסטר אביב, תשע"ב 2012. אני מאחל בהצלחה לכל קורא ומתעניין בתחום! עידכון אחרון התבצע ב־30 ביוני 2012. **למבחן חובה לדעת את כל המשפטים וההוכחות! המבחן יכיל שאלות מן ההרצאה, שאלות משיעורי הבית ושאלות במבנה דומה!** סיכום זה מסכם את כל ההגדרות, טענות ומשפטים שמופיעים עם הוכחה מלאה בסיכום המלא, הנמצא באתר Studenteen.org.

במידה ומישהו רוצה לשתף הערות, לבקש להוסיף תוכן כלשהו או להודיע על טעות כלשהי, שלחו לי למייל mail@studenteen.org.

חלק I

מרחבים מטרים

1 מרחבים מטרים

הגדרה 1.1 מרחב מטרי הוא קבוצה M ופונקציה $d: M\times M \to [0,\infty)$ כך שמתקיים:

(א) לכל $x,y\in M$, $d(x,y)=0$ אם"ם $x=y$.[1]

(ב) לכל $x,y\in M$ $d(x,y)=d(y,x)$.

(ג) לכל $x,y\in M$ $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.[2]

הפונקציה d נקראית מטריקה על M.

[1] כלומר, לכל $x\in M$ מתקיים $d(x,x)=0$, ואם $x\neq y$, אזי $d(x,y)\neq 0$.

[2] זה נקרא אי־שיוויון המשולש.

הגדרה 1.2 יהי (M,d) מרחב מטרי. תהי $A\subseteq M$ קבוצה כלשהי. אזי, הצמצום של d ל־$A\times A$ מהווה מטריקה על A. מטריקה זו נקראית המטריקה המושרה על A מ־M, ועם מטריקה זו A נקרא תת מרחב מטרי של M.

2 סדרות במרחב מטרי

הגדרה 2.1 סדרה בקבוצה M היא פונקציה $a:\mathbb{N}\to M$. נהוג לסמן את $a(n)$ ב־a_n.

הגדרה 2.2 יהי (M,d) מרחב מטרי. תהי a_n סדרה ב־M, ותהי $b\in M$. נאמר שהסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת ל־b אם לכל $\epsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $d(a_n,b)<\epsilon$. בהתאם לכך, נסמן זאת בסימונים $a_n\to b$, $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, ו־$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

טענה 2.3 אם קיים גבול לסדרה $\{a_n\}$ אזי הוא יחיד.

טענה 2.4 $a_n\to b \iff d(a_n,b)\to 0$

2.1 סדרות קושי

הגדרה 2.5 יהי (M,d) מרחב מטרי. סדרה $\{a_n\}$ נקראית סדרת קושי אם לכל $\epsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $m,n\ge n_0$ מתקיים $d(a_n,a_m)<\epsilon$.

טענה 2.6 כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

הגדרה 2.7 נאמר שמרחב מטרי שבו כל סדרה קושי מתכנסת נקרא מרחב מטרי <u>שלם</u>.

2.2 סדרות חסומות ודוגמא נגדית למשפט בולצאנו־ויירשטראס

הגדרה 2.8 סדרה $\{a_n\}$ נקראית <u>חסומה</u> אם קיים $b \in M$ וקיים $R > 0$ כך ש־$d(a_n, b) \le R$ לכל n.

3 פונקציות רציפות

3.1 כדורים פתוחים

הגדרה 3.1 יהי (M,d) מרחב מטרי, $a \in M$, $r > 0$. נסמן

$$B(a,r) := \{x \in M \mid d(x,a) < r\}$$

כאשר $B(a,r)$ נקרא הכדור הפתוח סביב a ברדיוס r.

הגדרה 3.2 $x_n \to a$ אם לכל $\epsilon > 0$ יש n_0 כך שלכל $n \ge n_0$, $x_n \in B(a,\epsilon)$.

3.2 רציפות

הגדרה 3.3 יהיו (M,d) (N,ρ) מרחבים מטרים, $f : M \to N$ פונקציה, ותהי $a \in M$. אנו נאמר ש־f רציפה ב־a אם לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $x \in M$, אם $d(x,a) < \delta$ אזי $\rho(f(x), f(a)) < \epsilon$. בסימון של כדורים נקבל את ההגדרה $f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\epsilon)$. אם $f : M \to N$ רציפה בכל נקודה $a \in M$ אז אנו קוראים ל־f רציפה.

משפט 3.4 יהיו (M,d), (N,ρ) מרחבים מטרים, $f : M \to N$, $a \in M$. אזי, f רציפה $\iff$ לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ ב־M שמתכנסת ל־a מתקיים ש־$f(x_n) \to f(a)$.

4 קבוצות פתוחות וסגורות

הגדרה 4.1 יהי (M,d) מרחב מטרי. תת קבוצה $U \in M$ תקרא <u>פתוחה ב־M</u> אם לכל $x \in U$ יש $r > 0$ כך ש־$B(x,r) \subseteq U$.

טענה 4.2 כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

משפט 4.3 הטענות הבאות מתקיימות:

(א) $M, \emptyset$ הינן פתוחות ב־M.

(ב) אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות ב־M, אז גם $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ קבוצה פתוחה ב־M.

(ג) אם $U_1, \dots U_n$ קבוצות פתוחות ב־M, אזי $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ פתוחה ב־M.

הגדרה 4.4 אם $x \in M$, אזי סביבה של X פירושה קבוצה פתוחה $U \subseteq M$ כך ש־$x \in U$.

טענה 4.5 יהיו M, N מרחבים מטריים, $f : M \to N$, $a \in M$. אזי, f רציפה ב־a $\iff$ לכל סביבה U של $f(a)$ קיימת סביבה V של a כך ש־$f(V) \subseteq U$.

טענה 4.6 יהיו M, N מרחבים מטריים, $f : M \to N$. אזי, f רציפה $\iff$ לכל $U \subseteq N$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב־M.[3]

למה 4.7 (הלמה השימושית) תהי A קבוצה. נניח לכל $x \in A$ נתון $x \in E_x \subseteq A$. אזי

$$\bigcup_{x \in A} E_x = A$$

4.1 שקילות מטריקות

הגדרה 4.8 נאמר כי שתי מטריקות d, ρ על אותה קבוצה M הן <u>שקולות</u> אם קבוצה $U \subseteq M$ היא פתוחה לפי d $\iff$ היא פתוחה לפי ρ.

טענה 4.9 יהי M מרחב מטרי, $A \subseteq M$ תת־מרחב. אזי, $U \subseteq A$ קבוצה פתוחה ב־A $\iff$ יש $W \subseteq M$ קבוצה פתוחה ב־M כך ש־$U = W \cap A$.

הערה 4.10 נשים לב כי מתקיימות התכונות הבאות:

(א) אם A פתוחה, $U \subseteq A$ פתוחה ב־A אז U גם פתוחה ב־M.

(ב) אם $U \subseteq A$ פתוחה ב־M אז U פתוחה ב־A, כי $U = U \cap A$.

4.2 קבוצות סגורות

הגדרה 4.11 יהי M מרחב מטרי. $S \subseteq M$ נקראית סגורה אם S^c פתוחה. מן התכונות של קבוצות פתוחות וכללי דה־מורגן נקבל כי:

(א) $\emptyset, M$ סגורות

[3] במילים, f רציפה אס"ם תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

(ב) אם $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות, אז גם $\bigcap_{\alpha\in I} S_\alpha$ סגורה.

(ג) אם $S_1,\dots,S_n$ אוסף סופי כלשהו של קבוצות סגורות, אז גם $S_1\cup\cdots\cup S_n$ סגורה.

משפט 4.12 יהי M מרחב מטרי, $A\subseteq M$ תת־קבוצה. אזי A סגורה ב־M $\iff$ היא מקיימת את התכונה הבאה: לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ ב־A, אם הסדרה מתכנסת ב־M אז הגבול שייך ל־A.[4]

טענה 4.13 יהי M מרחב מטרי, $\{x_n\}$ סדרת נקודות ב־M, $p\in M$. אזי, $x_n\to p$ $\iff$ לכל סביבה U של p, יש n_0 כך שלכל $n\ge n_0$, $x_n\in U$.

4.3 נקודות הצטברות

הגדרה 4.14 יהי M מרחב מטרי, $A\subseteq M$, $p\in M$. נאמר ש־p היא נקודת הצטברות של A אם לכל $r>0$ יש $x\in A$ כך ש־$0<d(x,p)<r$. נציג ניסוחים שקולים,

(א) לכל $r>0$ יש $p\ne x\in A$ כך ש־$d(x,p)<r$.

(ב) לכל סביבה U של p יש $p\ne x\in A$ כך ש־$x\in U$.

(ג) לכל סביבה U של p, $U\cap(A\backslash\{p\})\ne\emptyset$.

(ד) לכל סביבה U של p, $A\cap(U\backslash\{p\})\ne\emptyset$.

טענה 4.15 אם p נקודת הצטברות של A, אז קיימת סדרת נקודות $\{x_n\}$ ב־A, שכולן שונות מ־p, וכולן שונות זו מזו, כך ש־$x_n\to p$.

מסקנה 4.16 אם p נקודת הצטברות של A אז לכל $r>0$ יש אינסוף נקודות $x\in A$ כך ש־$0<d(x,p)<r$.

5 קומפקטיות במרחבים מטריים

הגדרה 5.1 יהי M מרחב מטרי נתון.

(א) כיסוי של M הינו אוסף $\{U_i\}_{i\in I}$ של תת קבוצות ב־M כך ש־$\bigcup_{i\in I} U_i = M$. נאמר שכיסוי של M הוא כיסוי פתוח אם לכל $i\in I$, U_i פתוחה ב־M.

(ב) אוסף חלקי נקרא תת־כיסוי של $\{U_i\}_{i\in I}$ אם $J\subseteq I$ וגם $\bigcup_{j\in J} U_j = M$.

(ג) $\gamma_\delta := \{B(x,\delta)\}_{x\in M}$. זה מקרה פרטי של כיסוי פתוח $\bigcup_{x\in M} B(x,\delta)=M$.

(ד) אומרים שמספר ממשי $\delta>0$ הוא מספר לבג עבור כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i\in I}$ אם γ_δ מעדן את $\{U_i\}_{i\in I}$. משמעות "מעדן", היא כי לכל $B(x,\delta)$ קיים $i_0\in I$ כך ש־$B(x,\delta)\subseteq U_{i_0}$. עבור כיסוי פתוח α ו־γ_δ המעדן אותו, נרשום $\alpha\prec\gamma_\delta$.

5.1 מרחב קומפקטי

הגדרה 5.2 (קומפקטיות) נאמר שמרחב M הוא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i\in I}$ של M, קיים תת־כיסוי סופי.

הגדרה 5.3 נאמר שמרחב מטרי M הוא חסום אם קיים $c>0$ כך ש־$d(x,y)\le c$ לכל $x,y\in M$. ניסוח שקול לכך הוא שקיים $r>0$ כך ש־$M=B(x,r)$.

טענה 5.4 כל מרחב מטרי קומפקטי הוא חסום.

משפט 5.5 נניח כי (M,d) מרחב מטרי. אזי, התנאים הבאים שקולים.

א. M קומפקטי.

ב. לכל תת־קבוצה אינסופית $E\subseteq M$ קיימת נקודת הצטברות.

ג. לכל סדרה ב־M יש תת־סדרה שמתכנסת.

הערה 5.6 לפי המשפט הקודם, א,ב,ג שקולים ולכן בכל מרחב קומפקטי מטרי, לכל כיסוי פתוח קיים מספר לבג.

טענה 5.7 נניח (M,d) מרחב מטרי, (Y,d_Y) תת־מרחב מטרי. אזי, אם (Y,d_Y) מרחב קומפקטי, אזי Y סגורה ב־M.

5.2 משפט היינה בורל

משפט 5.8 (היינה בורל) נניח $M\subseteq\mathbb{R}^n$. אזי, M הוא תת־מרחב קומפקטי $\iff$ M חסום וסגור ב־$\mathbb{R}^n$.

[4] בניסוח אחר, אם יש $p\in M$ כך ש־$x_n\to p$, אזי $p\in A$.

חלק II

מרחבים טופולוגיים

6 מרחבים טופולוגיים

6.1 הגדרת מרחב טופולוגי

הגדרה 6.1 מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T})$ הוא קבוצה X ומשפחה $\mathcal{T}$ של תתי־קבוצות של X המקיימת:

(א) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ב) אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף קבוצות כך ש־$U_\alpha \in \mathcal{T}$ לכל $\alpha \in I$, אזי גם $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

(ג) אם $U_1, \ldots, U_n$ אוסף סופי של קבוצות כך ש־ $U_i \in \mathcal{T}$ לכל $1 \leq i \leq n$, אזי גם $\bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} U_i \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ נקראית הטופולוגיה על X, והקבוצות ב־$\mathcal{T}$ ייקראו קבוצות פתוחות ב־X.

6.2 דוגמאות ובניות למרחבים טופולוגים ומטריזביליות

הגדרה 6.2 מ"ט $(X, \mathcal{T})$ ייקרא מטריזבילי אם יש מטריקה d על X כך ש־d משרה את $\mathcal{T}$.

טענה 6.3 הטופולוגיה הדיסקרטית היא מטריזבילית.

טענה 6.4 אם ב־X יש יותר מנקודה אחת, אזי הטופולוגיה הטריוויאלית איננה מטריזבילית.

טענה 6.5 יהי (M, d) מ"מ. אזי, לכל $a \in M$ הקבוצה $\{a\}$ סגורה.

7 פונקציות רציפות

7.1 פונקציות רציפות במרחב טופולוגי

הגדרה 7.1 יהי $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ שני מרחבים טופולוגיים. $f : X \to Y$ תיקרא רציפה אם לכל $U \in \mathcal{S}$ מתקיים ש־$f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

טענה 7.2 אם $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2), (Z, \mathcal{T}_3)$ מרחבים טופולוגיים, $f : X \to Y$ רציפה, $g : Y \to Z$ רציפה, אזי $g \circ f : X \to Z$ גם כן רציפה.

טענה 7.3 הטענות הבאות מתקיימות,

(א) לכל מ"ט $(X, \mathcal{T})$ העתקת הזהות $Id : X \to X$ רציפה.

(ב) יהיו X, Y מ"ט, $b \in Y$. נגדיר $K_b : X \to Y$ לכל $x \in X$ ע"י

$$K_b(x) = b$$

אזי K_b רציפה.

7.2 רציפות בנקודה

הגדרה 7.4 יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$ ו־$a \in X$. אזי, f תיקרא רציפה ב־a אם לכל סביבה U של $f(a)$ ב־Y יש סביבה V של a ב־X כך ש־$f(V) \subseteq U$.

טענה 7.5 $f : X \to Y$ רציפה $\iff$ היא רציפה בכל נקודה $a \in X$.

7.3 תתי־מרחבים

הגדרה 7.6 יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט, ותהי $A \subseteq X$. טופולוגיית "תת־המרחב" על A מוגדרת באופן הבא: נגדיר אוסף $\mathcal{S} \subseteq P(A)$ באופן הבא,

$$\mathcal{S} = \{U \subseteq A \mid \exists V \in \mathcal{T} \ : U = V \cap A\}$$

טענה 7.7 $\mathcal{S}$ אכן טופולוגיה על A.

הגדרה 7.8 בהינתן $A \subseteq X$, העתקת ההכלה מוגדרת כ־$i : A \to X$ כך ש־$i(a) = a$ לכל $a \in A$.

טענה 7.9 אם X מ"ט ו־$A \subseteq X$ תת־מרחב, אזי העתקת ההכלה $i : A \to X$ רציפה.

הגדרה 7.10 בהינתן $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ מוגדרת פונקציית הצמצום $f \mid_A : A \to Y$ ע"י $f \mid_A (a) = f(a)$. מתקיים כי $f \mid_A = f \circ i$.

טענה 7.11 אם $f : X \to Y$ רציפה, $A \subseteq X$, אזי $f \mid_A : A \to Y$ רציפה.

משפט 7.12 יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$ רציפה, ו־$f(X) \subseteq B \subseteq Y$. אזי, ניתן להגדיר $\hat{f} : X \to B$, $\hat{f}(x) = f(x)$. אזי גם $\hat{f}$ רציפה.

7.4 קבוצות סגורות

הגדרה 7.13 יהי X מ"ט. $K \subseteq X$ תיקרא סגורה אם K^C פתוחה.

טענה 7.14 יהי X מ"ט, ותהי $A \subseteq X$. אזי, $S \subseteq A$ סגורה ב־A אם"ם יש $Q \subseteq X$ סגורה ב־X כך ש־$S = Q \cap A$.

מסקנה 7.15 טענות נוספות שנוכל לומר על קבוצות פתוחות וסגורות בתתי מרחבים:

אם $U \subseteq A \subseteq X$, אזי אם U פתוחה ב־X אזי U פתוחה ב־A.

אם A בעצמה פתוחה ב־A אז גם הכיוון השני נכון: אם U פתוחה ב־A אז היא פתוחה ב־X.

טענה 7.16 יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$. אזי, f רציפה אם"ם לכל $S \subseteq Y$ שסגורה ב־Y מתקיים ש־$f^{-1}(S)$ סגורה ב־X.

8 הומאומורפיזמים

8.1 פונקציה פתוחה וסגורה

באופן דומה בו באלגברה ע"מ להראות שיוויון מוחלט של מבנה, הגדרנו את המושג של איזומורפיזם. כעת, נגדיר את המושג השקול בטופולוגיה, ההומאומורפיזם.

הגדרה 8.1 יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$.

(א) f נקראית פתוחה אם לכל $U \subseteq X$ פתוחה, גם $f(U)$ פתוחה.

(ב) f נקראית סגורה אם לכל $S \subseteq X$ סגורה גם $f(S)$ סגורה.

משפט 8.2 יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$. אזי, התנאים הבאים על f שקולים,

(א) f חח"ע ועל, רציפה, וגם $f^{-1} : Y \to X$ רציפה.

(ב) f חח"ע, על, רציפה ופתוחה.

(ג) f חח"ע, על, רציפה וסגורה.

(ד) f חח"ע, על ולכל $E \subseteq X$, E פתוחה $\iff$ $f(E)$ פתוחה.

(ה) f רציפה וקיימת $g : Y \to X$ רציפה כך ש־$g \circ f = \mathrm{Id}$, $f \circ g = \mathrm{Id}$.

8.2 הגדרת הומאומורפיזם

הגדרה 8.3 (הומאומורפיזם) f המקיימת את התנאים השקולים הנ"ל נקראית הומאומורפיזם.

הערה 8.4 אם d_1, d_2 שתי מטריקות על אותה קבוצה M אזי d_1, d_2 שקולות $\iff$ $\mathrm{Id} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ רציפה. אם נתונות שתי טופולוגיות $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ על קבוצה X, אזי $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \iff \mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ רציפה.

משפט 8.5 (א) כל הקטעים הפתוחים למינהם ב־$\mathbb{R}$ הומאומורפים זה לזה.

$$(-\infty, \infty) \quad (-\infty, a) \quad (a, \infty) \quad (a, b)$$

(א) כל הקטעים החצי פתוחים ב־$\mathbb{R}$ הומאומורפים זה לזה.

$$(-\infty, a] \quad [a, \infty) \quad (a, b] \quad [a, b)$$

(ג) כל הקטעים הסגורים הומאומורפים זה לזה.

$$[a, b]$$

9 סגור ופנים של קבוצה

9.1 סגור של קבוצה במרחב טופולוגי

הגדרה 9.1 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. נגדיר את הסגור של A, המסומן ב־$\overline{A}$, להיות $\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq S \\ S \text{ closed}}} S$.

מסקנה 9.2 התכונות הבאות מתקיימות:

(א) $A \subseteq \overline{A}$.

(ב) $\overline{A}$ סגורה.

(ג) אם $A \subseteq S$ ו־S סגורה אז $\overline{A} \subseteq S$.

מכאן נוכל להסיק כי $\overline{A}$ היא הקבוצה הסגורה ה"מינימלית" שמכילה את A.

9.1.1 אפיון הסגור של קבוצה

טענה 9.3 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. אזי $p \in \overline{A}$ $\iff$ לכל סביבה U של p מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

טענה 9.4 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. אזי $\overline{A} = A$ $\iff$ A סגורה.

9.2 פנים של קבוצה

הגדרה 9.5 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. הפנים של A שמסומן $\mathring{A}$ מוגדר כך

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ open}}} U$$

מסקנה 9.6 התכונות הבאות מתקיימות:

(א) $\mathring{A} \subseteq A$.

(ב) $\mathring{A}$ פתוחה.

(ג) אם $U \subseteq A$ פתוחה אזי $U \subseteq \mathring{A}$.

כלומר, $\mathring{A}$ היא הקבוצה הפתוחה המקסימלית המוכלת ב־A.

ע"י מעבר למשלימים, נסיק כי $\mathring{A} = \left(\overline{(A)^C}\right)^C$

הערה 9.7 A פתוחה $\iff$ $\mathring{A} = A$.

9.3 צפיפות

הגדרה 9.8 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$ תיקרא צפופה ב־X אם $\overline{A} = X$.

סימון. יהי X מ"ט, $A \subseteq B \subseteq X$. ניתן להביט בסגור של A ב־X אותו נסמן $\overline{A}^X$, וניתן להביט בסגור של A ב־B אותו נסמן ב־$\overline{A}^B$.

טענה 9.9 $\overline{A}^B = \overline{A}^X \cap B$.

טענה 9.10 $\mathring{A}^X \subseteq \mathring{A}^B$.

הגדרה 9.11 השפה של A מוגדרת כ־$\overline{A} \backslash \mathring{A}$.

הערה 9.12 $A \subseteq B \subseteq X$. אזי A צפופה ב־B אס"ם $\overline{A}^B = B$ אס"ם $\overline{A}^X \cap B = B$ אס"ם $B \subseteq \overline{A}^X$.

9.4 רציפות באמצעות כיסויים פתוחים וסגורים

הגדרה 9.13 כיסוי פתוח של X הוא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של קבוצות פתוחות ב־X כך ש־$X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

משפט 9.14 יהיו X, Y מ"ט. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X, $f : X \to Y$ פונקציה. אזי, f רציפה $\iff$ $f|_{U_\alpha}$ רציפה לכל $\alpha \in I$.

משפט 9.15 נניח $S_1, \ldots S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות ב־X כך ש־$X = S_1 \cup \cdots \cup S_n$. אזי, $f : X \to Y$ רציפה $\iff$ $f|_{S_i} : S_i \to Y$ רציפה לכל $1 \leq i \leq n$.

10 קשירות

10.1 הגדרת קשירות

הגדרה 10.1 מ"ט X נקרא קשיר אם לא קיימות $U, V \subseteq X$ פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש־$X = U \cup V$.

הגדרה 10.2 X קשיר $\iff$ לא קיימות קבוצות $K, L \subseteq X$ סגורות, זרות ולא ריקות כך ש־$X = K \cup L$. וכן : X קשיר $\iff$ לא קיימת A כך ש־$X \neq A \neq \emptyset$ כך ש־A פתוחה וגם סגורה.

10.2 תכונת ערך הביניים

משפט 10.3 נאמר שמ"ט X מקיים את תכונת ערך הביניים אם לכל פונקציה רציפה $f : X \to \mathbb{R}$ ולכל $a, b \in X$, אם $f(a) < t < f(b)$ אז יש $c \in X$ כך ש־$f(c) = t$.

משפט 10.4 X מקיים את תכונת ערך הביניים $\iff$ X קשיר.

משפט 10.5 $\mathbb{R}$ קשיר.

משפט 10.6 X קשיר $\iff$ לא קיימת פונקציה רציפה מ־X על מרחב דיסקרטי בן שתי נקודות.

משפט 10.7 יהיו X,Y מ"ט. X קשיר, $f:X\to Y$ רציפה ועל Y. אזי Y קשיר.

מסקנה 10.8 יהיו X,Y מ"ט, X קשיר ו־$f:X\to Y$ רציפה. אזי, $f(X)$ מרחב קשיר.

10.3 אפיון קשירות

למה 10.9 (הלמה הקטנה) יהי X מ"ט. יהיו U,V קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות כך ש־$X=U\cup V$, ונניח $A\subseteq X$ ת"מ קשיר. אזי $A\subseteq U$ או $A\subseteq V$.

טענה 10.10 (טענה 1) יהי X מ"ט. אזי, X קשיר $\iff$ לכל $a,b\in X$ יש תת־מרחב קשיר A כך ש־$a,b\in A$.

טענה 10.11 (טענה 2) אם $A,B\subseteq X$ קשירים, $A\cap B\neq\emptyset$, אזי $A\cup B$ קשיר.

משפט 10.12 יהי X מ"ט. אזי X קשיר $\iff$ לכל $a,b\in X$ יש אוסף סופי $A_1,\ldots,A_n$ של תתי־מרחבים קשירים של X כך ש־

$$A_1\cap A_2\neq\emptyset, A_2\cap A_3\neq\emptyset,\ldots,A_{n-1}\cap A_n\neq\emptyset$$

ו־$a\in A, b\in A_n$.

מסקנה 10.13 אם X מ"ט, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של תתי־מרחבים קשירים כך ש־$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=X$, $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\neq\emptyset$, אזי X קשיר.

משפט 10.14 יהי X מ"ט, $A\subseteq X$ קבוצה צפופה שהיא מרחב קשיר. אזי X קשיר.

משפט 10.15 הקטעים למינהם ב־$\mathbb{R}$ הם קשירים. למשל

$$[a,b] \quad (a,b] \quad (-\infty,b] \quad (a,\infty)$$

טענה 10.16 $[a,b)$, (c,d) לא הומאומורפים.

טענה 10.17 נניח $h:X\to Y$ הומאומורפיזם. כלומר, h רציפה וקיימת g רציפה $g:Y\to X$ כך ש־$g\circ h=\mathrm{Id}_X$, $h\circ g=\mathrm{Id}_Y$

$$h|_{X\backslash A}:X\backslash A\to Y$$

ואחרי כן צמצום הטווח

$$h|_{X\backslash A}:X\backslash A\to Y\backslash h(A)$$

נקבל הומאומורפיזם, כי

$$g|_{Y\backslash h(A)}:Y\backslash h(A)\to X\backslash A$$

וההרכבה בשני הכיוונים תהיה $\mathrm{Id}_{Y\backslash h(A)}$, $\mathrm{Id}_{X\backslash A}$. כלומר, לכל $A\subseteq X$, $h|_A:A\to h(A)$ הוא הומאומורפיזם.

10.4 מרכיבי קשירות

הגדרה 10.18 יהי X מ"ט. נגדיר על X את יחס השקילות הבא. עבור $a,b\in X$ נאמר ש־$a\sim b$ אם קיים תת מרחב קשיר $A\subseteq X$ כך ש־$a,b\in A$. זהו אכן יחס שקילות, נוכיח זאת:

1. **רפלקסיביות.** מתקיים $a\sim a$, עבור תת־המרחב $\{a\}$, אין אפשרות לקרוע את המרחב לשתי קבוצות פתוחות זרות שאינן ריקות, ולכן קשיר.
2. **סימטריות.** אם $a\sim b$ ברור ש־$b\sim a$, נובע מיידית מן ההגדרה.
3. **טרנזטיביות.** אם $a\sim b$, אז קיים תת־מרחב A_1 קשיר שמכיל את שניהם, ו־$b\sim c$, אז קיים תת־מרחב A_2 המכיל את שניהם. בהכרח $A_1\cup A_2$ מכיל את a,c, והוא קשיר כי $b\in A_1\cap A_2$, וממשפט לעיל נובע ש־$A_1\cup A_2$ קשיר, ומכיל את a,c ולכן $a\sim c$.

מחלקות השקילות של היחס $\sim$ נקראים "מרכיבי הקשירות" של X.

תכונות.

1. אם $A \subseteq X$ קשיר אז A מוכל באחד ממרכיבי הקשירות של X.[5]

2. רכיבי הקשירות הם קשירים. נוכיח זאת.
נניח כי C מרכיב קשירות של X, ונניח $a, b \in C$. כלומר, $a \sim b$ ולכן יש $A \subseteq X$ קשיר כך ש־$a, b \in A$. מכונה 1 נובע כי A מוכל באחד מרכיבי הקשירות, וכיוון ש־$A \cap C \neq \emptyset$[6] נקבל ש־$A \subseteq C$. ולכן, לכל $a, b \in C$ קיים תת־מרחב $A \subseteq C$ קשיר כך ש־$a, b \in A$, ולכן C קשיר.
מכאן שמרכיבי הקשירות הם תתי־המרחבים הקשירים המקסימלים ב־X[7]. בפרט, אם C רכיב קשירות ו־$C \subset A$, אזי A לא קשיר.

3. מרכיבי הקשירות הם קבוצות סגורות. נוכיח זאת.
יהי C רכיב קשירות. אזי, C צפוף ב־$\overline{C}$, ולכן $\overline{C}$ קשיר. ולכן מכיוון ש־$C \subseteq \overline{C}$, נקבל $C = \overline{C}$, כלומר C סגור.

4. אם יש רק מספר סופי של מרכיבי קשירות אז הם גם פתוחים. נוכיח זאת.
נניח $C_1, \ldots, C_n$ הם מרכיבי הקשירות של X. מתכונה 3 נובע שכל C_i קבוצה סגורה. מכאן ש

$$C_j = \left(\bigcup_{k \neq j} C_k\right)^C$$

פתוחה, כי האיחוד הסופי סגור ולכן המשלים פתוח.

טענה 10.19 עבור $\mathbb{Q}$ מרכיבי הקשירות הם כולם מהצורה $\{p\}$.

11 קשירות מסילתית

11.1 הגדרת קשירות מסילתית

הגדרה 11.1 יהי X מ"ט. מסילה ב־X היא פונקציה רציפה

$$\varphi : [0,1] \to X$$

אם $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$ אנו נאמר שהמסילה היא מ־a אל b.

[5] מתקיים כי אז לכל $a, b \in A$ בהכרח $a \sim b$, ולכן כל נקודות A מוכלות במחלקת שקילות יחדיו.
[6] כי a, b נמצאים שם.
[7] כלומר, כל תת־מרחב קשיר מוכל באחד מהם.

הגדרה 11.2 יהי X מ"ט. X נקרא קשיר מסילתית אם לכל $a, b \in X$ יש מסילה מ־a ל־b.

משפט 11.3 אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.

משפט 11.4 אם X קשיר מסילתית, $f : X \to Y$ רציפה ועל Y, אז Y קשיר מסילתית.

מסקנה 11.5 אם X קשיר מסילתית, $f : X \to Y$ רציפה, אזי $f(X)$ קשיר מסילתית.

הגדרה 11.6 יהיו $\varphi, \psi : [0,1] \to X$ שתי מסילות, ונניח ש־$\varphi(1) = \psi(0)$. נגדיר מסילה חדשה $\varphi * \psi : [0,1] \to X$, המוגדרת באופן הבא

$$\varphi * \psi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ו־$\varphi * \psi$ נקראית השרשור של φ ו־ψ.

11.2 מרכיבי קשירות מסילתית

הגדרה 11.7 בהינתן מ"ט X נגדיר על X יחס שקילות $\equiv$. עבור $a, b \in X$ נאמר כי $a \equiv b$ אם יש מסילה מ־a אל b. זהו אכן יחס שקילות.

1. **רפלקסיביות.** מסילה קבועה

2. **סימטריות.** נניח $a \equiv b$. כלומר, קיימת מסילה $\varphi : [0,1] \to X$, נגדיר $\overline{\varphi} : [0,1] \to X$ ע"י

$$\overline{\varphi}(t) = \varphi(1-t)$$

אזי מתקיים $\overline{\varphi}(0) = b, \overline{\varphi}(1) = b$ ולכן $b \equiv a$.

3. **טרנזטיביות.** נניח $a \equiv b$. אז יש מסילה φ בין a ל־b. נניח כי $b \equiv c$, אז יש מסילה בין b ל־c. אז $\varphi * \psi$ היא מסילה מ־a אל c.

למחלקות השקילות של יחס שקילות זה אנו קוראים מרכיבי הקשירות המסילתית של X.

תכונות.

1. נניח $A \subseteq X$ קשיר מסילתית, אז A מוכל באחד ממרכיבי הקשירות של X. נוכיח זאת.
יהיו $a, b \in A$. A קשיר מסילתית ולכן יש מסילה $\varphi : [0,1] \to A$ כך ש־$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. נסמן ב־$i : A \to X$ את העתקת ההכלה. אזי $i \circ \varphi : [0,1] \to X$ היא מסילה ב־X מ־a ל־b, ולכן $a \equiv b$. כלומר, כל שתי נקודות ב־A שקולות זו לזו ולכן A מוכל באחת ממחלקות השקילות, כלומר באחד ממרכיבי הקשירות המסילתית.

2. מרכיבי הקשירות המסילתית הם קשירים מסילתית. נוכיח זאת.
יהי C מרכיב קשירות מסילתית, ויהיו $a, b \in C$. אנו צריכים להראות שיש מסילה $\varphi : [0,1] \to C$ כך ש־$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$.
$a, b \in C$ ולכן $a \equiv b$ ולכן יש מסילה $\psi : [0,1] \to X$ כך ש־$\psi(0) = a, \psi(1) = b$, אולם $\psi([0,1])$ קשיר מסילתית כי $[0,1]$ קשיר מסילתית[8]. ולכן, $\psi([0,1])$ מוכל באחד ממרכיבי הקשירות המסילתית
$$\psi([0,1]) \cap C \neq \emptyset$$
ובהכרח המרכיב הנ"ל הוא C עצמו, כלומר $\psi([0,1]) \subseteq C$, וע"י צמצום הטווח ל־C נקבל $\varphi : [0,1] \to C$ ועדיין $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$.
נותר להראות שהמרחב $[0,1]$ קשיר מסילתית. נראה שכל הקטעים הפתוחים למינהם קשירים מסילתית. נראה זאת עבור $[0,1]$ אך אותה ההוכחה זהה לכל קטע מכל סוג.
יהיו $a, b \in [0,1]$. נגדיר $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ ע"י $\varphi(t) = (1-t)a + tb$.

לסיכום, בדומה למרכיבי קשירות, מרכיבי הקשירות המסילתית הם תתי־המרחבים הקשירים מסילתית המקסימליים והם מהווים חלוקה של X.

משפט 11.8 $\mathbb{R}^n$ קשיר מסילתית.

טענה 11.9 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. אז A קשיר $\iff$ A קשיר מסילתית, ומרכיבי הקשירות והקשירות המסילתית של A מתלכדים והם פתוחים.

12 קומפקטיות

12.1 קומפקטיות במרחב טופולוגי

הגדרה 12.1 אוסף קבוצות $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ נקרא כיסוי פתוח של X אם

1. $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha = X$.
2. כל U_α פתוח.
3. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי, תת כיסוי פירושו $J \subseteq I$ כך ש־$\bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha = X$.

תת כיסוי סופי הוא תת כיסוי שעבורו J היא קבוצה סופית.

הגדרה 12.2 יהי X מ"ט. אזי X נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X קיים תת־כיסוי סופי.

הגדרה 12.3 יהי X מ"ט, $A \subseteq X$. כיסוי פתוח של A ב־X הוא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של תתי קבוצות פתוחות ב־X כך ש־$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supseteq A$.

תת־כיסוי הוא $J \subseteq I$ כך ש־$\bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha \supseteq J$.

משפט 12.4 יהי X מ"ט כלשהו, $A \subseteq X$. אזי A קומפקטי $\iff$ לכל כיסוי פתוח של A ב־X יש תת־כיסוי סופי.

משפט 12.5 יהיו X, Y מ"ט, X קומפקטי, $f : X \to Y$ רציפה ועל. אזי Y קומפקטי.

מסקנה 12.6 אם הכל כנ"ל מלבד הדרישה ש־f על, אז נכון ש־$f(X)$ קומפקטי.

משפט 12.7 יהי X מ"ט קומפקטי. $A \subseteq X$ סגורה ב־X. אזי A קומפקטי.

12.2 מרחב האוסדורף

הגדרה 12.8 יהי X מ"ט. אנו נאמר ש־X הוא האוסדורף[9] אם לכל $a \neq b \in X$ יש קבוצות פתוחות זרות U, V כך ש־$a \in U, b \in V$.

דוגמא 12.9 כל מרחב מטרי הוא האוסדורף.

הגדרה 12.10 מרחב נקרא T_1 אם כל נקודון $\{p\}$ הוא קבוצה סגורה.

טענה 12.11 $T_2 \implies T_1$.

משפט 12.12 יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $A \subseteq X$, אזי A גם כן האוסדורף.

[8] זאת נראה בסוף.

[9] או T_2.

משפט 12.13 יהי X מ"ט האוסדורף, $A \subseteq X$ קומפקטי. אזי A סגורה ב־X.

תזכורת. $f : X \to Y$ נקראית סגורה אם לכל $S \subseteq X$ סגורה ב־X מתקיים ש־$f(S)$ סגורה ב־Y.

משפט 12.14 יהיו X, Y מ"ט. X קומפקטי, Y האוסדורף, ותהי $f : X \to Y$ רציפה. אזי f סגורה.

מסקנה 12.15 יהיו X, Y מ"ט. X קומפקטי, Y האוסדורף. $f : X \to Y$ רציפה, חח"ע ועל. אזי f היא הומאומורפיזם.

הגדרה 12.16 יהיו X, Y מ"ט. העתקה $f : X \to Y$ נקראית שיכון אם אחרי צמצום הטווח ל־$f(X)$ ההעתקה $f : X \to f(X)$ היא הומאומורפיזם[10].

משפט 12.17 יהיו X, Y מ"ט. X קומפקטי, Y האוסדורף, $f : X \to Y$ רציפה וחח"ע. אז f היא שיכון.

13 בסיסים לטופולוגיה

הגדרה 13.1 יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי. אוסף $\mathcal{B}$ של תתי־קבוצות של X נקרא בסיס עבור $\mathcal{T}$ אם

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.
2. לכל $U \subseteq \mathcal{T}$ ולכל $a \in U$ יש $V \in \mathcal{B}$ כך ש־$a \in V \subseteq U$.

הקבוצות ב־$\mathcal{B}$ נקראות קבוצות בסיס.

ניסוח שקול באמצעות הלמה השימושית[11] אומר כי כל קבוצה פתוחה היא איחוד של קבוצות מ־$\mathcal{B}$.

טענה 13.2 הכדורים הפתוחים ב־$\mathbb{R}^n$ מהצורה

$$\left\{B(q,r) \mid q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\right\}$$

הם בסיס לטופולוגיה של $\mathbb{R}^n$.

מסקנה 13.3 יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט. $\mathcal{B}$ בסיס ל־$\mathcal{T}$. Y עוד מ"ט. אזי לכל פונקציה $f : X \to Y$, f רציפה $\iff$ לכל קבוצת בסיס $V \in \mathcal{B}$ מתקיים ש־$f^{-1}(V)$ פתוחה ב־Y.

[10] בפרט f רציפה וחח"ע אך היא מקימת יותר מזה.
[11] הלמה השימושית בעמוד 2

טענה 13.4 $f : X \to Y$ פתוחה $\iff$ לכל קבוצת בסיס $V \in \mathcal{B}$[12] מתקיים ש־$f(V)$ פתוחה ב־Y.

משפט 13.5 תהי X קבוצה. $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ אוסף של תתי קבוצות. אזי B היא בסיס לטופולוגיה על X $\iff$ $\mathcal{B}$ מקיימת את שני התנאים הבאים:

1. (א) $\bigcup_{V \in \mathcal{B}} V = X$
2. (ב) לכל $U, V \in \mathcal{B}$ ולכל $a \in U \cap V$ קיים $w \in \mathcal{B}$ כך ש־$q \in W \subseteq U \cap V$.

ניסוח שקול באמצעות הלמה השימושית[13]: לכל $U, V \in \mathcal{B}$ מתקיים ש־$U \cap V$ הוא איחוד של קבוצות מ־$\mathcal{B}$.

מסקנה 13.6 התנאי הבא על $\mathcal{B}$ הוא תנאי מספיק אך **לא הכרחי** לכך ש־$\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על X,

1. X מתקבל כאיחוד הקבוצות ב־$\mathcal{B}$.
2. אם $U, V \in \mathcal{B}$ אז $U \cap V \in \mathcal{B}$.

14 מכפלה סופית של מרחבים טופולוגיים

תזכורת. עבור קבוצות $A_1, \ldots, A_n$, מוגדרת הקבוצה

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

הגדרה 14.1 יהיו $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ n מרחבים טופולוגיים. אנו רוצים להגדיר על הקבוצה $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. נסמן

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \mid U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_n\}$$

טענה 14.2 $\mathcal{B}$ אוסף של תתי קבוצות של $X_1 \times \cdots \times X_n$ שמקיים את התנאי המספיק לכך שהוא בסיס לטופולוגיה על $X_1 \times \cdots \times X_n$.

[12] $\mathcal{B}$ בסיס ל־X.
[13] בעמוד 2.

הגדרה 14.3 בהינתן קבוצות $A_1,\ldots,A_n$ ישנן n העתקות טבעיות

$$p_i : A_1\times\cdots\times A_n \to A_i$$

המוגדר כך

$$p_i\left((a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)\right) := a_i$$

כאשר p_i נקראת ההטלה על הרכיב ה־i.

טענה 14.4 יהיו $X_1,\ldots X_n$ מ"ט. אזי העתקות ההטלה

$$p_i : X_1\times\cdots\times X_n\to X_i$$

הן רציפות ופתוחות.

משפט 14.5 יהיו $X_1,\ldots,X_n$ ו־Y מרחבים טופולוגיים. תהי $f:Y\to X_1\times\cdots\times X_n$. אזי f רציפה $\iff$ $p_i\circ f$ רציפה לכל $1\le i\le n$.

משפט 14.6 יהיו $X_1,\ldots,X_n$ מ"ט ו־Y עוד מ"ט, ונניח נתונות n פונקציות רציפות $f_i:Y\to X_i$. אזי הן מגדירות ביחד פונקצייה

$$\underset{1\le i\le n}{(f_i)} : Y\to X_i$$

המוגדרת כך:

$$\underset{1\le i\le n}{(f_i)}\ (y) = (f_1(y), f_2(y),\ldots f_n(y))$$

אזי אם כל הפונקציות ה־f_i רציפות, גם הפונקציה $(f_i)_{1\le i\le n}$ רציפה [14].

15 מכפלות אינסופיות

הגדרה 15.1 יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של קבוצות. נרצה להגדיר את קבוצת המכפלה שתסומן

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$$

נשים לב כי ניתן לחשוב על המכפלה $A_1\times\cdots\times A_n$ כאוסף כל הפונקציות

$$\{f:\{1,2,\ldots,n\}\to A_1\cup\cdots\cup A_n \mid f(1)\in A_1,\ldots,f(n)\in A_n\}$$

נכליל כעת לאוסף אינסופי.
אם $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות. נגדיר

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \left\{ f: I\to \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \mid \forall\alpha\in I:\ f(\alpha)\in A_\alpha \right\}$$

איברי המכפלה הם פוקציות φ שתחומן I, ולכל $\alpha\in I$: $\varphi(\alpha)\in X_\alpha$.

סימון. נסמן את האיברים כך : $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$, $a_\alpha\in X_\alpha$.

בהינתן אוסף $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של מרחבים טופולוגיים נרצה להגדיר טופולוגיה על הקבוצה $\prod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$.

הגדרה 15.2 נגדיר אוסף $\mathcal{B}$ הבא של תתי קבוצות של $\prod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$.

$$\mathcal{B} = \left\{\prod_{\alpha\in I} U_\alpha\right\}$$
$\forall\alpha, U_\alpha\subseteq X_\alpha$ is open in X_α and there
exists a finite $F\subseteq I$such that $\forall\alpha\notin F: U_\alpha = X_\alpha$

טענה 15.3 האוסף $\mathcal{B}$ מקיים את התנאי המספיק לכך שהוא בסיס לטופולוגיה.

הטופולוגיה המוגדרת ע"י הבסיס $\mathcal{B}$ נקראית טופולוגית המכפלה, והיא תמיד הטופולוגיה שבה נשתמש עבור מכפלה של מ"ט.

תזכורת. ההטלה $p_\beta : \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha\to X_\beta$ מוגדרת כך:

$$p_\beta((a_\alpha)_{\alpha\in I}) = a_\beta$$

משפט 15.4 ההטלות p_β רציפות ופתוחות.

משפט 15.5 יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ"ט, Y מ"ט, $f: X\to \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$. אזי f רציפה $\iff$ $p_\alpha\circ f$ רציפה לכל α.

[14] לפי המשפט הקודם.

משפט 15.6 אם $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים שכולם האוסדורף. אזי, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ הוא האוסדורף.

משפט 15.7 יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ"ט שכולם קשירים מסילתית. אזי $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ קשיר מסילתית.

הגדרה 15.8 יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ"ט, ויהי $\beta \in I$. לכל $\alpha \neq \beta$ נבחר $a_\alpha \in X_\alpha$. נגדיר העתקה

$$F : X_\beta \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$$

באופן הבא:

$$p_\beta \circ F = \mathsf{Id}_{X_\beta}$$

$$\alpha \neq \beta : p_\alpha \circ F = \text{Constant function to } a_\alpha$$

טענה 15.9 F היא שיכון.

מסקנה 15.10 אם $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ האוסדורף אז לכל $\beta \in I$ מתקיים X_β האוסדורף.

משפט 15.11 יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מ"ט שכולם קשירים. אזי $\prod X_\alpha$ קשיר.

טענה 15.12 אם Z מ"ט, $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על Z, אזי Z קומפקטי $\iff$ לכל כיסוי של Z ע"י קבוצות מ־$\mathcal{B}$ יש תת־כיסוי סופי.

משפט 15.13 יהיו X, Y מ"ט קומפקטיים. אזי $X \times Y$ קומפקטי[15].

15.1 תכונות נוספות של מכפלות אינסופיות

הגדרה 15.14 יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מ"ט, ולכל $\alpha \in I$ פונקציה רציפה $f_\alpha : Y_\alpha \to X_\alpha$. נגדיר

$$\left(\prod_{\alpha\in I} f_\alpha\right) : \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$$

המוגדר כך, בהינתן $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$ $\left(\prod_{\alpha\in I} f_\alpha\right)$ הוא האיבר ב־$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ שהרכיב ה־α הוא $f_\alpha(y_\alpha)$. ניתן לסמן זאת כך,

$$\left(\prod_{\alpha\in I} f_\alpha\right)((y_\alpha)_{\alpha\in I}) = (f_\alpha(y_\alpha))_{\alpha\in I}.$$

משפט 15.15 יהי X מ"ט כלשהו. $f, g : X \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות רציפות. אזי $f \cdot g$ רציפה, $f + g$ רציפה. אם f לא מתאפסת בשום מקום אז $\frac{1}{f}$ רציפה.

16 איחודים זרים

יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים. ראשית נחליף את כל הנקודות בכל X_α כך שכולם יהיו **זרים זה לזה.** למשל, ניתן להחליף כל X_α ב־$X_\alpha \times \{\alpha\}$:

$$x \in X_\alpha \rightsquigarrow (x, \alpha)$$

ולכן אחרי ביצוע פעולה זו אנחנו מניחים ש־X_α כולם זרים. נגדיר כעת מ"ט $\coprod_{\alpha\in I} X_\alpha$ באופן הבא,

הגדרה 16.1 הטופולוגיה על $\coprod_{\alpha\in I} X_\alpha$ היא מעל קבוצת הנקודות $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$, ותת־קבוצה של X תיקרא פתוחה אם היא מהצורה

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$$

כאשר $U_\alpha \subseteq X_\alpha$, U_α פתוחה ב־X_α.

טענה 16.2 העתקת ההכלה $i_\beta : X_\beta \to \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha$ היא רציפה ופתוחה, ובפרט היא שיכון.

טענה 16.3 לכל $f : \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha \to Y$, f רציפה $\iff$ $f \circ i_\alpha$ רציפה לכל α. בלשון של צמצומים: $f : \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha \to Y$, f רציפה $\iff$ $f|_{X_\alpha}$ רציפה לכל α.

17 מרחבי מנה

הגדרה 17.1 יהי X מ"ט, ויהי $\sim$ יחס שקילות על X. נסמן ב־$\widehat{X}$ את קבוצת מחלקות השקילות. נרצה לבחור טופולוגיה על $\widehat{X}$.
קיימת ההעתקה הטבעית $\rho : X \to \widehat{X}$ המוגדרת ע"י $\rho(a) = [a]$, כש־$[a]$ היא מחלקת השקילות של a.

[15] כמסקנה, לכל אוסף סופי $X_1, \ldots, X_n$ של מ"ט קומפקטיים גם $X_1 \times \cdots \times X_n$ קומפקטי.

נאמר ש־$V \subseteq \widehat{X}$ תחשב פתוחה $\iff$ $\rho^{-1}(V)$ פתוחה ב־X.[16]

משפט 17.2

1. ההעתקה $\rho : X \to \widehat{X}$ רציפה.
2. לכל מ"ט Y ולכל העתקה $f : \widehat{X} \to Y$, f רציפה $\iff$ $f \circ \rho$ רציפה.

אם $g : X \to Y$ פונקציה רציפה שמכבדת את יחס השקילות, כלומר לכל $a, b \in X$ אם $a \sim b$ אזי $g(a) = g(b)$, אזי g משרה פונקציה $\widehat{g} : \widehat{X} \to Y$ ע"י

$$\widehat{g}([a]) = g(a)$$

נשים לב כי ההגדרה בלתי תלויה בנציג כי g מכבדת את יחס השקילות. מתקיים $g = \widehat{g} \circ \rho$, הנחנו ש־$g$ רציפה, ומהמשפט נובע ש־$\widehat{g}$ רציפה.

הערה 17.3 כדי שבכלל תהיה פונקציה g, צריך שכל מחלקה תועתק לאותו מקום (הפונקציה תכבד את יחס השקילות). אם g רציפה, אזי $\widehat{g}$ גם תהיה רציפה. g על $\iff$ $\widehat{g}$ על, ו־$\widehat{g}$ חח"ע אם $g(a) = g(b)$ גורר ש־$a \sim b$.

17.1 העתקות מנה

הגדרה 17.4 יהיו X, Y מ"ט. $f : X \to Y$ נקראית העתקת מנה אם

f על.

$U \subseteq Y$ פתוחה ב־Y $\iff$ $f^{-1}(U)$ פתוחה ב־X.

הגדרה 17.5 אם $f : X \to Y$ העתקת מנה, נגדיר יחס שקילות על X באופן הבא

$$a \sim b \iff f(a) = f(b)$$

טענה 17.6 $f : X \to Y$ העתקת מנה $\iff$ מתקיימים שני התנאים

1. f על.
2. $S \subseteq Y$ סגורה ב־Y $\iff$ $f^{-1}(S)$ סגורה ב־X.

טענה 17.7 הרכבה של העתקות מנה היא העתקת מנה.

משפט 17.8

1. אם f על, רציפה ופתוחה אז f העתקת מנה.
2. אם f על, רציפה וסגורה אז f העתקת מנה.

מסקנה 17.9 יהי X מ"ט קומפקטי, Y מ"ט האוסדורף, $f : X \to Y$ על ורציפה, אזי f היא העתקת מנה.

18 תכונות הפרדה

18.1 תכונות T_1, T_2

בפרקים הקודמים הגדרנו את התכונות T_1, T_2, כאשר T_2 הוא האוסדורף ו־T_1 בה כל נקודון סגור.

את T_1 ניתן לבטא כתכונת הפרדה כך: לכל $a, b \in X$ יש U פתוחה כך ש־$a \in U$, $b \notin U$.

18.2 תכונות T_3, T_4

הגדרה 18.1 מ"ט X ייקרא T_3 אם

1. X הוא T_1.
2. לכל נקודה $a \in X$ ולכל קבוצה סגורה $S \subseteq X$ המקיימים $a \notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות U, V כך ש־$S \subseteq V$, $a \in U$.

הגדרה 18.2 מ"ט X נקרא T_4 אם

1. X הוא T_1.
2. לכל שתי קבוצות סגורות זרות S, T קיימות קבוצות פתוחות זרות U, V כך ש־$S \subseteq U, T \subseteq V$.

נשים לב כי מתקיים

$$T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1$$

[16] דרך אחרת לחשוב על $\rho^{-1}(V)$ היא ש־$\rho^{-1}(V)$ הוא איחוד המחלקות ב־V.

משפט 18.3 כל מרחב מטרי הוא T_4.

משפט 18.4 יהי X מ"ט האוסדורף קומפקטי. אזי, X הוא T_4.