**תזכורת**

אם , ו – אי פריק, אזי: או .

**משפט**

לפולינומים במשתנה אחד מעל שדה, מתקיים פירוק יחיד. ז"א, אם:

כש - , פולינומים אי פריקים, אזי ולכל , (עד כדי כפל בקבוע ושינוי סדר של גורמים).

**הוכחה**

* בעזרת אינדוקציה, ניתן להוכיח שאם , אי פריק, אז .
* את טענת המשפט נוכיח בערת אינדוקציה על מספר הגורמים.

בסיס: טריוויאלי.

צעד: נניח נכונות הטענה עבור גורמים, כלומר פירוק יחיד של: .

נוכיח נכונות הטענה עבור גורמים, כלומר פירוק יחיד של:

.

נתבונן ב - . זהו פולינום אי פריק, . לכן, לפי הצעד הראשון של ההוכחה, מחלק לפחות אחד מהפולינומים .

למשל, . שניהם אי פריקים, לכן הם פרופורציונאליים, ז"א, עד כדי כפל בפולינום קבוע, מתקיים: , לכן:

.

אבל, בחוג , מתקיים חוק הצמום: אם , אזי

.

[נימוק: ].

לאחר הצמצום ב - , נקבל: , ולפי הנחת האינדוקציה

עד כדי שינוי סדר של גורמים וכפל בקבוע.

**הערה**

בעזרת פירוק יחיד, ניתן לנמק את הטענה הבאה: כל השורשים של הפולינום המינימלי של מטריצה , הם הערכים העצמיים של .

. (בהנחה שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים), ובשימוש בפירוק היחיד: .

**הערה**

אם , אי הפולינומים האי פריקים הם פולינומים לינאריים בלבד.

**הערה**

אם , אזי הפולינומים האי פריקים הם פולינומים לינאריים או פולינומים ריבועיים (ממעלה 2) בלבד.

**נימוק**

אם ואם שורש של , אזי גם הוא גם שורש של .

**הערה**

אם או שדה סופי, אזי קיימים אינסוף פולינומים אי פריקים, ויש פולינומים אי פריקים ממעלה כלשהי.

**צורת ז'ורדן**

**משפט (ז'ורדן)**

תהי מטריצה ריבועית. נניח שהפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי דומה למטריצה בצורה הבאה:

. כשכל בלוק הוא תא ז'ורדן, כלומר:

( , לא בהכרח שונים אחד מהשני).

בנוסף, המטריצה היא יחידה (עד כדי סדר של הבלוקים).

ל – קוראים צורת ז'ורדן של .

**משפט**

אם אופרטור לינארי כך ש - מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי, קיים בסיס של כך שהמטריצה המייצגת היא מטריצת ז'ורדן . קוראים ל - בסיס מז'רדן. יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

**מסקנה**

תהי צורת הז'ודרן של מטריצה . נניח ש – מתפרק לגורמים לינאריים. נסמן כל הערכים העצמיים השונים של . אזי:

1. לכל , הריבוי האלגברי שלו שווה לסכום הגדלים של כל הבלוקים המכילים את .

מזה נקבל: .

1. לכל , הריבוי הגיאומטרי שלו שווה למספר הבלוקים המכילים את .
2. לפולינום המינימלי מתקיים: , כש - הינו הגודל המקסימלי של הבלוק המכיל את .

**נימוק**

, ולכל בלוק ז'ורדן .

1. *לכסינה אם ורק אם .*

**דוגמה**

נתבונן בשתי מטריצות .

, מיחידות צורת ז'ורדן. מתקיים:

1. .
2. .