מופשטת 1 – פתרון תרגיל בית 12

שאלה 1

א. נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:
$\mathbb{Z}_{40}$, $U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5$

פתרון

$\mathbb{Z}_{40}\cong\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5$ שכן $(8,5)=1$. האקספוננט של חבורה זו הוא 40.

$U_{10}=\{1,3,7,9\}\cong\mathbb{Z}_4$ (בדקו ש U_{10} ציקלית) וכמו כן $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_{10}$ ולכן $U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$. האקספוננט של החבורה הזו הוא 20.

לבסוף האקספוננט של $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$ הוא 10. לכן קיבלנו בסה"כ שלוש חבורות שאינן איזומורפיות.

דרך אחרת- מעבירים לצורה הקנונית שהיא יחידה עד כדי איזומורפיזם.
הצורה הקנונית הראשונה היא $\mathbb{Z}_{40}$, השניה היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{20}$. שימו לב:
$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{20}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$.
השלישית היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{10}$.

ב. 1. כמה חבורות אבליות מסדר 500 (עד כדי איזומורפיזם) יש?

פתרון

$500=2^2\cdot5^3$.
החבורות האבליות הדרושות הן מכפלה ישרה של תת חבורה 2- סילו מסדר 4, בתת חבורה 5-סילו מסדר 125.
יש שתי אפשרויות לתת חבורה 2-סילו מסדר 4 שהיא כמובן אבלית והן: $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.
יש שלוש אפשרויות לת"ח 5-סילו והן: $\mathbb{Z}_{125},\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{25},\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$.
בסה"כ יש $2\cdot3=6$ חבורות אבליות מסדר 500.

2. בכמה מהן יש איבר מסדר 4?

פתרון

ב-3 מהן (כאשר מופיע בפירוק $\mathbb{Z}_4$).

3. בכמה מהן יש איבר מסדר 20?

פתרון

ב-3 מהן. (כאשר מופיע בפירוק $\mathbb{Z}_4$) זה נובע מכך שבת"ח 5-סילו יש תמיד איבר מסדר 5, וכמו כן החיתוך של תת חבורה זו עם תת חבורת 2-סילו הוא טריוויאלי.

ג. מצאו מספר חבורות אבליות (עד כדי אוזימורפיזם) מסדר 3600. בכמה מהן יש תת-חבורה 5-סילו ציקלית?

$3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, משיקולים דומים לשאלה הקודמת יש $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ חבורות אבליות מסדר 3600 עד כדי איזומורפיזם. ת"ח 5-סילו (כלומר מסדר 25) תהיה ציקלית אמ"מ מופיע הגורם $\mathbb{Z}_{25}$ ולא $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$. יש $5 \cdot 2 = 10$ כאלו עד כדי איזומורפיזם.

ד. מצאו את $\exp(S_3), \exp(S_5)$.

<u>פתרון</u>

נמצא את סדרי האיברים ב-S_3: id מסדר 1, כל חילוף הוא מסדר 2, וכל מחזור מאורך 3 הוא מסדר 3. סה"כ יש איברים מסדר 1,2,3, ו-$lcm(1,2,3) = 6$ לכן האקספוננט של S_3 הוא 6. כעת נמצא את סדרי האיברים ב-S_5: id מסדר 1, כל מחזור מאורך k $(2 \le k \le 5)$ הוא מסדר k, תמורות מהצורה $(12)(34)$ הן מסדר 2 ותמורות מהצורה $(12)(345)$ הן מסדר 6. לכן סה"כ סדרי האיברים ב-S_5 הם $1,2,3,4,5,6$. מתקיים $lcm(1,2,3,4,5,6) = 60$ לכן $\exp(S_5) = 60$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

א. מצאו כמה איברים מכל סדר יש בחבורות $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^3}$.

ב. הוכיחו שבחבורת p אבלית לא ציקלית יש תת חבורה מסדר p^2 שאינה ציקלית.

<u>פתרון</u>

א. בכל החבורות יש איבר אחד מסדר 1 והוא איבר היחידה. ב $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ כל שאר האיברים, כלומר $p^3 - 1$ איברים הם מסדר p. ב-$\mathbb{Z}_{p^2}$ יש $\phi(p^2) = p^2(1-\frac{1}{p}) = p^2 - p$ איברים מסדר p^2. האיברים מסדר p^2 ב-$\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$ הם בדיוק האיברים $(a,b) \in \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$ כך ש $o(a) = p^2$. מכאן שמספרם הוא $\left(p^2 - p\right)p = p^3 - p^2$. לכן מספר האיברים מסדר p ב-$\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$ הוא: $p^3 - (p^3 - p^2) - 1 = p^2 - 1$.

באופן דומה מספר האיברים מסדר p^3 ב-$\mathbb{Z}_{p^3}$ הוא:

$\phi(p^3) = p^3(1-\frac{1}{p}) = p^3 - p^2$. איברים מסדר p בחבורה זו הם כל האיברים מהצורה $p^2 a$ כאשר $1 \le a \le p-1$ ולכן יש $p-1$ כאלה. לכן מספר האיברים מסדר p^2 הוא $p^3 - \left(p-1\right) - 1 = p^3 - p$.

ב. כדי שחבורת p אבלית לא תהיה ציקלית היא צריכה לכלול גורם מהצורה $\mathbb{Z}_{p^\alpha}\oplus\mathbb{Z}_{p^\beta}$ כאשר $1\le\alpha<\beta$. עפ"י משפט קושי קיימות $G\le\mathbb{Z}_{p^\alpha}, H\le\mathbb{Z}_{p^\beta}$ כך ש $H\cong G\cong\mathbb{Z}_p$. תת החבורה הדרושה היא $H\oplus G$.

מש"ל

שאלה 3

האם קיימת חבורה אבלית G, כך ש- $\exp(G)=4$, $|G|=32$, ו- $\left[G:G^2\right]=4$?

פתרון

$\exp(G)=4$, $|G|=32$ ומכאן G איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4$ או ל $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$.

$$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4 \Big/ 2(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2\big/2\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\big/2\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4\big/2\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$$

והסדר המתקבל הוא שמונה.

$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4 \Big/ 2(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ וסדר החבורה הוא 16. בכל מקרה לא מקבלים $\left[G:G^2\right]=4$ ולכן אין חבורה כזו.

מש"ל

שאלה 4

הראו ש- D_4 פתירה.

פתרון

הסדרה $D_4 \triangleright <\sigma> \triangleright <\sigma^2> \triangleright \{id\}$ היא סדרת הרכב שבה כל הגורמים הם פשוטים (איזומורפיים ל-$\mathbb{Z}_2$), ולכן החבורה פתירה. שימו לב שזאת לא סדרת ההרכב היחידה. לדוגמא: $D_4 \triangleright <\sigma^2,\tau> \triangleright <\tau> \triangleright \{id\}$.

מש"ל

שאלה 5

א. תהא G חבורה מסדר 34. הוכיחו שהיא פתירה.

פתרון

$34=2\cdot17$ ולכן $G\cong\mathbb{Z}_{34}$ או $G\cong D_{17}$ ובכל אחד מהמקרים הללו G פתירה.

ב. הראו שחבורת הקווטרניונים Q_8 פתירה.

פתרון

זוהי חבורת p שכן סדר החבורה הוא 2^3 ולכן היא פתירה.

ג. הוכיחו שכל חבורה מסדר 88 היא פתירה.

פתרון

$88=2^3\cdot 11$. $n_{11}|8\wedge n_{11}\equiv 1\pmod{11}$ ולכן $n_{11}=1$. מכאן קיימת תח"נ 11-סילו ל-G; נסמנה H. תת החבורה H היא ציקלית מסדר ראשוני ולכן אבלית ופתירה. G/H חבורת p, שכן סדרה הוא 2^3 ולכן היא פתירה. מכיון ש H ו- G/H פתירות נקבל עפ"י משפט ש- G פתירה.

מש"ל

שאלה 6

מעל קבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ נגדיר פעולה $(a_1,b_1)\bullet(a_2,b_2)=(a_1+b_1a_2,b_1b_2)$. הוכיחו:

א. $G=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\bullet)$ חבורה והיא לא אבלית.

ב. חשבו את G',G'' והראו ש- G פתירה.

פתרון

א. סגירות: (ברור).

אסוציאטיביות:

$$((a,b)(x,y))(A,B)=(a+bx,by)(A,B)=(a+bx+byA,byB)=$$
$$(a,b)((x,y)(A,B))=(a,b)(x+yA,yB)=(a+b(x+yA),byB)$$

איבר נייטרלי:

$$(a,b)(x,y)=(a,b)=(a+bx,by)\Rightarrow y=1,x=0\Rightarrow e=(0,1)$$

הופכי:

$$(a,b)(x,y)=(0,1)=(a+bx,by)\Rightarrow y=\frac{1}{b},x=-a/b\Rightarrow (a,b)^{-1}=(-a/b,1/b)$$

החבורה לא אבלית: $(1,2)(3,5)=(7,10)\neq(8,10)=(3,5)(1,2)$

ב. מחישוב של $uvu^{-1}v^{-1}$ עבור כל u,v מהחבורה נקבל שכל איבר בנגזרת הראשונה הוא מהצורה $(x,1)$; ומחישוב של כל $uvu^{-1}v^{-1}$ עבור כל איבר מהנגזרת הראשונה נקבל $(x,1)(a,1)(-x,1)(-a,1)=(0,1)=e$ ולכן החבורה פתירה.

מש"ל

שאלה 7

אם A,B תתי חבורות נורמליות של G אזי $[A,B]\subseteq A\bigcap B$.

פתרון

מ"ל שהיוצרים של $[A,B]$ שייכים ל $A\bigcap B$. יהיו $a\in A,\quad b\in B$. אזי, מהנורמליות של A,B נקבל ש-

$$[a,b]=aba^{-1}b^{-1}=a\left(ba^{-1}b^{-1}\right)\in AA=A$$
$$[a,b]=aba^{-1}b^{-1}=\left(aba^{-1}\right)b^{-1}\in BB=B$$

לכן, $[a,b]\in A\cap B$ כדרוש.

מש"ל

שאלת בונוס 1

תהי G חבורה ו- $A \triangleleft G$. נתון ש- G/A ציקלית. הוכיחו ש- $[G,A]=[G,G]$.

פתרון

ההכלה $[G,A]\subseteq[G,G]$ היא טריוויאלית, ונותר להוכיח את ההכלה בכיוון ההפוך.
כלומר, יש להראות: $[G,A]\supseteq[G,G]$. נשים לב שמתקיים:
G/K אבלית $\Leftrightarrow$ $[G,G]\subseteq K$.
לכן נרצה להראות ש- $G/[G,A]$ אבלית.
נתון ש- G/A ציקלית. נסמן את היוצר ב- xA עבור $x\in G$. אזי ניתן לראות כי $G=\langle A,x\rangle$ (שימו לב ש- $G=\bigcup x^iA$ מכיוון ש- $Ax=xA$).
נתבונן בהעתקה הטבעית $\varphi: G\to G/[G,A]$ המוגדרת על ידי $\varphi(g)=g[G,A]$.
נסמן בקיצור $g[G,A]=\bar{g}$ (ובאותו אופן נסמן גם: $\varphi(A)=\bar{A}, \varphi(G)=\bar{G}$).
בסימונים החדשים מתקיים: $\bar{G}=\langle\bar{A},\bar{x}\rangle$. נראה ש- $\bar{A},\{\bar{x}\}\subseteq Z(\bar{G})$ מה שיאמר ש- $\bar{G}\subseteq Z(\bar{G})$ ולכן $\bar{G}$ תהיה אבלית.
נראה תחילה ש- $\bar{A}\subseteq Z(\bar{G})$. יהי $\bar{g}\in\bar{G}$, ויהי $\bar{a}\in\bar{A}$. אזי $[\bar{a},\bar{g}]=\overline{[a,g]}=\bar{1}$ ולכן קיבלנו את הדרוש.
כעת נראה ש- $\{\bar{x}\}\subseteq Z(\bar{G})$:
כל איבר של G הוא מהצורה x^ia עבור $a\in A$ ולכן כל איבר של $\bar{G}$ הוא מהצורה $\overline{x^ia}$ עבור $\bar{a}\in\bar{A}$. אבל $\bar{x}$ מתחלף עם $\bar{x}^i\bar{a}$ ואלו הם כל איברי החבורה, ולכן $\bar{x}\in Z(\bar{G})$.
ולכן, בסה"כ, $\bar{G}$ אבלית וקיבלנו את הדרוש.
מש"ל

שאלת בונוס 2

א. הוכיחו שהשיכון $G\to S_n$ שמספק משפט קיילי הוא למעשה לתוך A_n, אם ורק אם תת חבורת 2-סילו של G אינה ציקלית.
ב. נניח של- G יש תת חבורת 2-סילו ציקלית. הוכיחו של- G יש תת חבורה מאינדקס 2.

פתרון

א. יהי $f: G\to S_n$ השיכון ממשפט קיילי (כאשר $|G|=n$). קודם כל ניזכר שעבור $g\in G$ מסדר m, $f(g)$ הוא מכפלת $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים מסדר m.
זה נובע מכך ש- $(x,gx,g^2x,\dots g^{m-1}x)$ מחזור מסדר m, $g^mx=x$ וש $f(g)(x)=gx, f(g)(gx)=g^2x, f(g)(g^ix)=g^{i+1}x$.

כעת, נניח שהשיכון ל S_n אינו שיכון ל A_n אזי קיים $g\in G$ מסדר m, כך ש $f(g)\notin A_n$. מכיון ש $f(g)$ הוא מכפלת $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים מסדר m ומצד שני $f(g)\notin A_n$ בהכרח m זוגי ו- $\frac{n}{m}$ אי זוגי (מדוע?). מכאן $\langle g\rangle$ ציקלית מסדר זוגי ומאינדקס אי זוגי. מכאן ת"ח 2 - סילו של $\langle g\rangle$ היא גם ציקלית. אבל ת"ח 2 - סילו של $\langle g\rangle$ היא גם ת"ח 2 - סילו של G (מדוע?). בסה"כ קיבלנו שאם השיכון ל S_n אינו שיכון ל A_n אז קיימת ל G ת"ח 2 - סילו ציקלית.

בכיוון הפוך נניח שקיימת ל G ת"ח 2 - סילו ציקלית ונניח ש g הוא יוצר של ת"ח זו. מהדיון לעיל בהכרח $f(g)$ הוא מכפלת $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים מסדר m כאשר m הוא הסדר של g. מכיוון ש-$\langle g\rangle$ ת"ח 2 - סילו של G אז m זוגי ו $\frac{n}{m}$ אי זוגי אבל אז $f(g)$ תמורה אי זוגית.

ב. נזהה את G עם $f(G)$. עפ"י משפט האיזומורפיזם השני ומשפט ההתאמה (בדומה למה שהראנו בתרגול) מתקיים:

$[G:G\cap A_n]=[GA_n:A_n]\leq[S_n:A_n]=2$. נניח בשלילה ש-$[G:G\cap A_n]=1$ אזי $G=G\cap A_n$ ו $G\subseteq A_n$. כלומר השיכון $f:G\to S_n$ שמספק משפט קיילי הוא למעשה לתוך A_n. אך נתון של-G יש תת חבורת 2-סילו ציקלית ומכאן נקבל סתירה ל סעיף א'. לכן מתקיים $[G:G\cap A_n]=2$ ומצאנו ל-G תת חבורה מאינדקס 2.

מש"ל