מבחן בקורס **"אלגברה ליניארית 2"** 89-113

<u>מועד א, תשע"א</u>

מרצים: פר' סטיבן שניידר, פר' גרגורי סויפר

מתרגלים: דר' מיטל אליהו, לואי פולב, ארז שיינר

חלק ראשון – 30 נקודות

<u>בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות</u> (שווי כל שאלה: 10 נקודות)

1. נתבון בהעתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y-2z\\2x-y\\x+z\end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

2. תהי $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ העתקה ליניארית בעלת המטריצה המייצגת: $[\phi]=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&1&1\\-2&1&3&1\end{pmatrix}$.

   מצאו בסיס אורתוגונאלי עבור $\ker\phi$.

3. פתרו את מערכת המשוואות הבאה ב<u>אמצעות שיטת קרמר</u>:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&3&9\\2&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

4. מצאו את ווקטור הקואורדינטות של $v=(1,1,1,1)$ לפי הבסיס הבא של $\mathbb{R}^4$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית: $\{(2,1,1,0),(1,-2,0,1),(1,0,-2,-1),(0,1,-1,2)\}$

חלק שני – 30 נקודות

פתרו את <u>שתי השאלות</u> הבאות (שווי כל שאלה: 15 נקודות)

1. נתבונן במטריצה הסימטרית $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$.

   א. מצאו את הערכים העצמיים של A וכן ווקטור עצמי <u>אחד</u> כלשהו.

   ב. האם המטריצה לכסינה? נמקו היטב!

2. נתבונן במטריצה $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

א. הראו ש- 2 הוא ערך עצמי של A, ומצאו עבורו וקטור עצמי.
ב. האם המטריצה הנתונה לכסינה מעל הממשיים?

חלק שלישי – 45 או 50 נקודות (תלוי בבחירה)

<u>פתרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות:</u>

1. (20 נקודות) יהי V מרחב ווקטורי ממימד סופי. תהי $\varphi: V \to V$ העתקה ליניארית המקיימת $\varphi^2 = I$. הוכיחו כי קיים בסיס $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ל- V שמקיים לכל $1 \le i \le n$: $\varphi(v_i) = v_i$ או $\varphi(v_i) = -v_i$.

<u>רמז:</u> הוכיחו תחילה את הטענה הבאה: כל ווקטור $v \in V$ ניתן להצגה כסכום $v = w_1 + w_2$ כאשר $\varphi(w_1) = w_1,\ \varphi(w_2) = -w_2$. הוכיחו גם כי בתנאים הללו מתקיים $V = V_1 \oplus V_2$ כאשר $V_1 = \{v : \varphi(v) = v\}, V_2 = \{v : \varphi(v) = -v\}$

2. (15 נקודות) מצאו את צורת הז'ורדן של המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

3. (15 נקודות) יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו:

א. אם $AA^t = 0$ אזי $A = 0$
ב. אם $BAA^t = 0$ אזי $BA = 0$

4. (15 נקודות) יהי V מרחב ווקטורי ממימד $2n+1$. יהיו $V_1, V_2 \subseteq V$ שני תתי מרחבים.
הוכיחו:

א. אם $V_1 \cap V_2 = V_1^\perp \cap V_2^\perp = 0$ אזי $V_1^\perp \oplus V_2^\perp = V$.
ב. $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \cap V_2^\perp) + \dim(V_1^\perp \cap V_2) + \dim(V_1^\perp \cap V_2^\perp) \ge 1$

בהצלחה!