פתרונות (2)

1. תהי $f_n : X \to \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n \to f$ במידה שווה. הראו כי אם $\mu(X)<\infty$ אזי f אינטגרבילית וגם $\int f_n \to \int f$.

פתרון: מכיוון שההתכנסות הינה במידה שווה, נובע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 גדול מספיק עבורו $|f-f_n|<\varepsilon$ לכל x ולכל $n>n_0$. נסמן $h_n = f-f_n$ מכאן שעפ"י משפט ההתכנסות החסומה נובע כי f אינטגרבילית וגם $\lim\limits_{n\to\infty}\int h_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int f-f_n = 0 \Rightarrow \int f = \lim\limits_{n\to\infty}\int f_n$.

2. אם f_n הינה סדרה של פונקציות אי-שליליות ואינגרביליות כך ש $f_n \downarrow f$, הראו כי $\int\limits_X fd\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$.

פתרון: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int\limits_X \liminf\limits_{n\to\infty} f_n d\mu = \int\limits_X f_n d\mu \le \liminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$.

מצד שני, עפ"י למת פאטו ההפוכה, נובע כי $\int\limits_X fd\mu = \int\limits_X \limsup\limits_{n\to\infty} f_n d\mu \le \limsup\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$.

לסיכום, קיבלנו $\liminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu \le \int\limits_X f_n d\mu \le \limsup\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$, ומכאן ש $\int\limits_X fd\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$

3. יהיו $f, f_n : X \to [0,\infty]$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$ כב"מ ו $f \ge f_n$ לכל n . הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n = \int f$.

פתרון:

נגדיר סדרה חדשה $h_n = f-(f-f_n)$ ונשים לב כי היא חיובית שכן $f \ge f_n$ עפ"י הנתון. כעת, עפ"י למת פאטו נובע כי

$$\int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}\left[f - \left(f - f_n \right)\right] = \int \underline{\lim} f_n =$$
$$= \int f \le \underline{\lim} \int h_n = \underline{\lim} \int f - \left(f - f_n \right) = \underline{\lim} \int f_n$$

מצד שני , מכיוון ש $f \ge f_n$ נובע ממונוטוניות האינטגרל כי $\int f \ge \int f_n$ ולכן גם $\int f \ge \overline{\lim} \int f_n$. בסופו של דבר קיבלנו כי $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

4. תהי $f \ge 0$ פונקציה מדידה לבג כך ש $\int fdm = \infty$. הראו שלכל $M > 0$ קיימת פונקציה g כך ש $0 \le g \le f$ המקיימת :

i. $\int gdm > M$

ii. g חסומה

iii. לתומך של g מידה סופית.

פתרון: נסתכל על הפונקציה $g_n(x) = 1_{[-n,n]\cap\{f \le n\}}(x) f(x)$. קל לראות כי לכל $n \in \mathbb{N}$ g_n מקיימת את שני הסעיפים האחרונים. הסעיף הראשון נובע מההתכנסות המונוטונית.

5. נניח כי (X, S, μ) הינו ממ"ח ותהי סדרה f_n של פונקציות אינטגרביליות אי שליליות כך ש $f_n \to f$ כב"מ וגם $\int_X f_n d\mu \to \int_X f\, d\mu$. הראו כי לכל $E \in S$ מתקיים $\int_E f_n d\mu \to \int_E fd\mu$.

פתרון: מכיוון ש f_n אי שליליים, נובע כי $f_n \ge \left| f_n 1_E \right|$. ברור כי $f 1_E,\ f_n 1_E$ אינטגרביליות ומתקיים ש $f_n 1_E \to f 1_E$. ומכאן שכל התנאים למשפט ההתכנסות הנשלטת המוכלל מתקיימים ולכן $\int_E f_n d\mu \to \int_E fd\mu$.

6. תהי X קבוצה מדידה עם מידה סופית ותהי $f \in L^1(X, \mu)$ (אינטגרבילית ביחס ל μ) אי שלילית. הראו ש $\lim_{\alpha\to 1-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X fd\mu$. האם התוצאה נכונה גם עבור $\alpha \to 1+$?

פתרון: נגדיר $A = \{x : f(x) > 1\}$. אזי, מכיוון ש $0 < \alpha < 1$ נובע כי $f^\alpha(x) \uparrow f(x)$ כאשר $\alpha \to 1$. כמו כן, על A^c נובע כי f^α נשלטת ע"י הפונקציה 1_{A^c} אשר אינטגרבילית כיוון שהמידה

הינה סופית. מכאן שעפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג ומשפט ההתכנסות הנשלטת נובע

כי $\int_X f d\mu = \lim_{\alpha\to 1-} \int_X f^{\alpha} d\mu = \lim_{\alpha\to 1-}\left(\int_{A^c} f^{\alpha} d\mu + \int_A f^{\alpha} d\mu \right)$.

7. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית, $a\in\mathbb{R}$ ונגדיר עבור $x>a$

$$F(x) = \int_{[a,x]} f dm$$

הראו כי F רציפה.

פתרון: ניקח סדרה $a<x_n$ כך ש $x_n\to x$. נגדיר $h_n = f1_{[a,x_n]}$ וברור כי $h_n \to f1_{[a,x]}$. כעת,

מכיוון שהסדרה x_n מתכנסת נובע כי מ n מסויים $x_n<M$, כאשר $x<M\in\mathbb{R}$. נשים לב כי $|h_n|\le |f|1_{[a,M]}$ וכן $|f|1_{[a,M]}$ אינטגרבילית. מכאן שכל התנאים להתכנסות הנשלטת מתקיימים ולכן $F(x) = \int_{[a,x]} fdm = \lim_{n\to\infty}\int h_n dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,x_n]} f dm = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$

8. יהי (X,S,μ) ממ"ח סיגמא סופי. נניח ו f הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\varepsilon>0$ אזי קיימת $A\in S$ כך ש $\mu(A)<\infty$ ומתקיים

$$\varepsilon + \int_A f > \int f .$$

פתרון: מכיוון ש (X,S,μ) הינו ממ"ח סיגמא סופי, נובע כי קיימת סדרה של קבוצות $A_n\in S$ כך ש $\mu(A_n)<\infty$ וגם $X=\bigcup_n A_n$. ללא הגבלת הכלליות נניח כי A_n זרות. נסמן $E_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ איחוד סופי של קבוצות ונסמן $f_n = f1_{E_n}$, הצימצום של f על E_n . מכיוון ש $X=\bigcup_k E_k$ נובע כי $f_n\to f$, מכיוון ש f אי שלילית נובע כי $f_n \uparrow f$. נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג להסיק ש $\int f = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f = \lim_{n\to\infty}\int f1_{E_n} = \lim_{n\to\infty}\int f_n$. מכיוון ש $f\ge f_n$ נובע כי

$$\int_{E_n} f \le \int f$$

ומכאן ש $\int_{E_n} f \uparrow \int f$. קל לראות כי $\mu(E_k)<\infty$ לכל k וכי מהגדרת הגבול נובע כי $\varepsilon + \int_{E_k} f > \int f$ עבור k מספיק גדול.

9. תהי $\phi(x)$ פונקציה המקיימת $\phi(x)=\phi(x+1)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ובנוסף $\int_{[0,1]}\phi(x)\,dx<\infty$. נגדיר

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.

פתרון: קל לראות כי $f(x)$ מחזורית 1, כלומר $f(x+1)=f(x)$. מכאן שמספיק להראות כי f סופית כב"מ על הקטע $[0,1]$. נשים לב כי

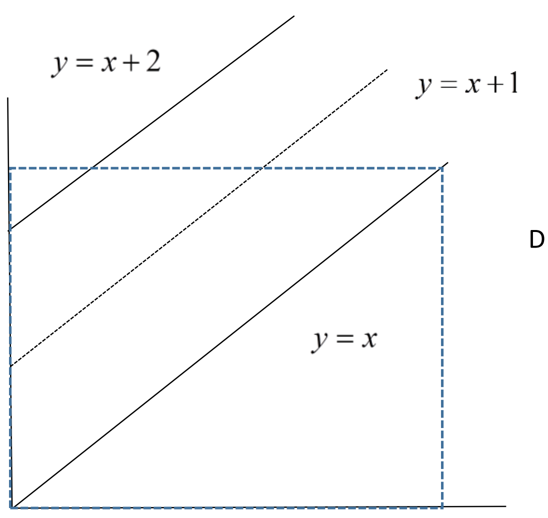
$$\int_{[0,1]} f(x)dm=\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(nx)}{n^2}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}\frac{\phi(nx)}{n^2}dm$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,n]}\frac{\phi(x)}{n^3}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}\frac{\phi(x)}{n^2}dm<\infty$$

מכאן נובע כי f סופית כב"מ.

10. יהי $X=Y=\mathbb{R}$ ונסתכל על $\mathbb{R}^2$ ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x\geq 0 \text{ and } x\leq y<x+1\\ -1 & x\geq 0 \text{ and } x+1\leq y<x+2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

הראו כי $\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)\neq\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?



נחשב

$$h(y)=\int f(x,y)\,m(dx)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ \int_0^y 1dm=y & 0\le y<1 \\ \int_0^{y-1} -1dm+\int_{y-1}^{y} 1dm=2-y & 1\le y<2 \\ \int_{y-2}^{y-1} -1dm+\int_{y-1}^{y} 1dm=0 & 2\le y<\infty \end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)\,m(dx)m(dy)=\int_{-\infty}^{\infty} h(y)dm=\int_0^1 ym(dy)+\int_1^2 (2-y)m(dy)=1$$

מצד שני,

$$g(x)=\int f(x,y)\,m(dy)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_x^{x+1} 1m(dy)+\int_{x+1}^{x+2} -1m(dy)=0 & x\ge 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)\,m(dy)m(dx)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dm=\int_{-\infty}^{\infty} 0dm=0$$

ומכאן ש

$$.1=\int\int f(x,y)\,m(dx)m(dy)\neq\int\int f(x,y)\,m(dy)m(dx)=0$$

על מנת להראות כי אין סתירה למשפט פוביני, נראה כי $\int_{\mathbb{R}^2}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=\infty$. נחשב את $\int_D\left|f(x,y)\right|dm\times dm$ כאשר D_x הינו הריבוע בציור שצלעו באורך x . ברור כי אינטגרל כפול על הפונקציה הינו השטח של הריבוע D_x פחות שני המשולשים. כלומר, אם גודל הריבוע הוא x^2 אזי

$\int_{D_x} \left| f(x,y) \right| dm\times dm = x^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2} \right) = 2x-2$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי $\int_{\mathbb{R}^2} \left| f(x,y) \right| dm\times dm = \lim_{x\to\infty} \int_{D_x} \left| f(x,y) \right| dm\times dm = \lim_{x\to\infty} 2x-2 = \infty$. מכאן כי תנאי משפט פוביני אינם מתקיימים ולכן אין סתירה.

11. נניח ו μ הינה מידה סופית . הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית הינה אינטגרבילית אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{x : f(x) \geq n\}\right) < \infty$.

פתרון:

$\Leftarrow$: אם f אינטגרבילית. נרשום

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{x : f(x) \geq n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{(\{x: f(x)\geq n\})} d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{x: f(x)\geq n\}} d\mu$$
$$= \int \sum_{n=1}^{\infty} n_{\{x: n+1 > f(x) \geq n\}} d\mu$$
.

הפונקציה $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n_{\{x: n+1 > f(x) \geq n\}}$ הינה למעשה $\lfloor f(x) \rfloor$ פונקצית פלור, השלם הגדול ביותר מכל השלמים שקטנים מהערך $f(x)$. כך שלמעשה הפונקציה $g(x)$ נשלטת ע"י הפונקציה $f(x)$ ולכן אינטגרבילית.

$\Rightarrow$: אם הטור מתכנס. אזי נוסיף את פונקצית האינדיקטור ונקבל כי $f(x) \leq g(x)+1$. כמו כן , $g(x)+1$ אינטגרבילית כי המידה הינה סופית ולכן גם f אינטגרבילית.

12. **<u>הגדרה:</u>** נסמן $C_0 = [0,1]$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את C_{n+1} להיות C_n לאחר שמורידים מכל קטע בו את השליש האמצעי (הפתוח) ע"י הנוסחה $C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3} + \frac{2}{3} \right)$. קבוצת קנטור מוגדרת כחיתוך של כל ה- C_n : $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. (כל C_n הוא איחוד של 2^n קטעים סגורים שאורכם $\frac{1}{3^n}$.

א. יהי $x\in[0,1]$, אם נציג את x בבסיס טרנארי (3) $x=0.x_1x_2x_3...$ (כלומר $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$) אזי נקבל כי $x\in C\Leftrightarrow$ לכל $n\in\mathbb{N}$, הספרה ה-nית של x $x_n\equiv d_n(x)\equiv x$ היא 0 או 2.

ב. C אינה בת-מנייה.

ג. $m(C)=0$

ד. C אינה איחוד בן-מנייה של קטעים סגורים.

<u>הוכחה:</u>

א. נוכיח $x\in C_n\Leftrightarrow x_1,x_2,...,x_n\in\{0,2\}$ באינדוקציה:

המקרה $n=1$:

$$x\in C_1\Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\Leftrightarrow x_1=0 \text{ or } x_1=2\Leftrightarrow x_1\in\{0,2\}$$

נניח את נכונות הטענה עבור n כלשהו ונוכיח את נכונותה עבור $n+1$:

$(\Rightarrow)$

$$x\in C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x\in\frac{C_n}{3}\text{ or } x\in\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow 3x\in C_n\text{ or } 3x-2\in C_n$$

ע"פ הנחת האינדוקציה, $d_n(3x)\in\{0,2\}$ או $d_n(3x-2)\in\{0,2\}$. אבל - $d_n(3x-2)=d_n(3x)=d_{n+1}(x)=x_{n+1}$. מספיק לשים לב כי $C_{n+1}\subseteq C_n$ כדי לראות שהטענה נכונה.

$(\Leftarrow)$

ידוע כי $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}\in\{0,2\}$ ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה $x\in C_n$. יש להוכיח כי $x\in C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$, כלומר $3x\in C_n$ או $3x-2\in C_n$. ובכן:

אם $x_1=0$ נקבל $3x=0.x_2x_3...x_nx_{n+1}...\in C_n$,

ואם $x_1=2$ נקבל $3x-2=0.x_2x_3...x_nx_{n+1}...\in C_n$.

סיימנו את האינדוקציה. סה"כ $x\in C\Leftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}(x\in C_n)\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}(x_n\in\{0,2\})$

מש"ל.

ב. עפ"י סעיף ב' יש התאמה בין סדרות של 0 ו 2 וקבוצת קנטור. כמו כן, יש התאמה בין סדרות של 0 ו 1 ל $\mathbb{R}$ ...

ג. לכל $N \in \mathbb{N}$, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C_N$ ועפ"פ מונוטוניות $0 \le m(C) \le m(C_N) = 2^N \frac{1}{3^N}$. נשאיף $N \to \infty$ לקבל את הדרוש.

ד. נניח בשלילה כי $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר I_n קטעים סגורים. אזי כבר ראינו כי $m(I_n) = 0$ ולכן בהכרח $I_n = \{x_n\}$, כלומר הקטעים הסגורים הינם נקודונים. אבל עפ"י סעיף ג' C איננה בת מנייה ומכאן סתירה.

תזכורת: תהי X קבוצה כלשהי. $S \subseteq P(X)$ הינה σ-אלגברה של קבוצות ב X אם מתקיימים התנאים הבאים:

i. $A \in S \Rightarrow A^c \in S$.
ii. $X \in S$.
iii. $\{E_n\} \in S \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$

13. <u>תרגיל:</u> תהי $f : (\mathbb{R}, L(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}^*$ מדידה לבג, הוכיחו את השוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dm(x) = \int_{0}^{\infty} m(\{x : |f(x)| \ge t\}) dm(t) .$$

<u>פתרון:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{0}^{|f(x)|} 1 dm(t) \right] dm(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{0}^{\infty} I_{\{(x,t): |f(x)| \ge t\}} dm(t) \right] dm(x) \overset{Tonelli}{=} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): |f(x)| \ge t\}} dm(x) \right] dm(t) = \int_{0}^{\infty} m(\{x : |f(x)| \ge t\}) dm(t)$$

הסיבה שמשפט טונלי תקף היא כי מדובר במידות לבג $dm(x), dm(t)$ שהן שלמות ו- σ סופיות. בנוסף יש לבדוק כי הפונקציה $I_{\{(x,t): |f(x)| \ge t\}}$ מדידה במרחב המכפלה, וע"פ אחד מתרגילי הבית הכרחי ומספיק להוכיח כי ה**קבוצה** $\{(x,t) : |f(x)| \ge t\}$ מדידה "$L \otimes L$" .

(נשתמש בסימון $\otimes$ לסמן את σ -אלגברת המכפלה)

ובכן יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, ההעתקה $x\mapsto\left|f(x)\right|$ מדידה (הרכבה של רציפה ומדידה), ולכן הקבוצה $\left\{x\in\mathbb{R}:\left|f(x)\right|>\alpha\right\}=:E_\alpha\in L$. ומכאן $\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:\left|f(x)\right|>\alpha\right\}=E_\alpha\times\mathbb{R}\in L\otimes L$ מלבן מדיד (שהוא קבוצה מדידה!). קיבלנו אם כן כי ההעתקה $(x,t)\mapsto\left|f(x)\right|$ מדידה $L\otimes L$.

הפונקציה $t\mapsto t$ גם כן מדידה לבג ולכן $\left\{t\in\mathbb{R}:t>\alpha\right\}=:F_\alpha\in L$, ומכאן $\left\{(x,t):t>\alpha\right\}=\mathbb{R}\times F_\alpha\in L\otimes L$. הפרש בין פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן $(x,t)\mapsto\left|f(x)\right|-t$ מדידה. הקבוצה שלנו היא בדיוק $\left(\left|f\right|-t\right)^{-1}\left[[0,\infty)\right]$ ולכן מדידה.

14. <u>תרגיל:</u> תהי μ מידה סופית על $\mathbb{R}$, ונגדיר $\alpha(x)=\mu\left((-\infty,x]\right)$. הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha(x+c)-\alpha(x)\right]dm(x)=c\mu(\mathbb{R})$.

פתרון:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha(x+c)-\alpha(x)\right]dm(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\mu\left((-\infty,x+c]\right)-\mu\left((-\infty,x]\right)\right]dm(x)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu\left((x,x+c]\right)dm(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{(x,x+c]}d\mu(t)dm(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_{\left\{(x,t):x<t\le x+c\right\}}d\mu(t)dm(x)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_{\left\{(x,t):t>x\ge t-c\right\}}d\mu(t)dm(x)\overset{Tonelli}{=}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_{\left\{(x,t):t>x\ge t-c\right\}}dm(x)d\mu(t)=c\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mu(t)=c\mu(\mathbb{R})$$

15. הוכיחו כי $I=\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. רמז : חשבו קודם את I^2 וחשבו את האינטגרל הכפול ע"י מעבר לקורדינטות פולאריות .

פתרון : $I^2=\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int\limits_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dydx$. הפונקציה $f(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ הינה רציפה ולכן מדידה ביחס לסיגמא אלגברת לבג המכפלה. כמו כן היא חיובית ולכן ניתן להשתמש במשפט טונלי. לכן

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}m(dx)m(dy)=\int\limits_{[0,\infty)\times[0,\infty)}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}m\times m(dx,dy)$$

מכיוון ש f רציפה היא אינטגרבילית רימן לפחות במובן הרחב (כלומר האינטגרל יכול להיות שווה ל ∞ . נוכל לעבור לקורדינאטות פולאריות

$$x^2+y^2=r^2$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

נקבל כי

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta=\frac{\pi}{2}$$

ומכאן ש $I=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.