תרגיל מס 1 - אינפי 4 תשע`ח

4 במרץ 2019

1. מצאו את האורכים של העקומות הבאות:
   (א) הספירלה $\gamma\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t\right)$ $t\in\left[0,\pi\right]$
   (ב) הציקלואידה $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$. (רמז: תנסו לחכות הת הקואורדינטות הקוטביות).
   (ג) העקומה המתקבלת על ידי חיתוך של ספרת היחידה $x^{2}+y^{2}+z^{2}=1$ והמישור $x+y=1$.

2. הראו שאם לעקומה חלקה קיימת הצגה קוטבית $r=\rho\left(\theta\right)$ עבור $a\leq\theta\leq b$, אזי האורך שלה נתון על ידי

$$\int_{a}^{b}\left\Vert \rho^{2}\left(\theta\right)+\left(\rho'\left(\theta\right)\right)^{2}\right\Vert \mathbf{d}\theta .$$

3. תהי $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}^{n}$ עקומה חלקה ופשוטה בעלת תמונה Γ. נגדיר עבור $x\in\gamma\left[\left(a,b\right)\right]$, $T_{\gamma}\left(x\right)=\frac{\gamma'\left(t\right)}{\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert }$ כאשר $\gamma\left(t\right)=x$.
   (א) הראו ש T_{γ} מוגדרת היטב על התמונה של הקטע הפתוח $\left(a,b\right)$ תחת γ .
   (ב) הראו שאם γ ו $\tilde{\gamma}$ הן שקולות, אזי $T_{\gamma}=T_{\tilde{\gamma}}$.
   (ג) בהמשך נניח ש γ בנוסף אינה עקומה סגורה ונסמן $\Gamma=Im\gamma$. תהי $\tilde{\gamma}:\left[c,d\right]\to\Gamma$ פרמטריזציה פשוטה וחלקה של Γ כך ש $\gamma\left(a\right)=\tilde{\gamma}\left(c\right)$ ו $\gamma\left(b\right)=\tilde{\gamma}\left(d\right)$.
      i. הראו שהפונקציה $\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma:\left[a,b\right]\to\left[c,d\right]$ מוגדרת היטב, מונוטונית עולה ועל.
      ii. הראו שהפונקציה $\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$ גזירה ברציפות ושונה מאפס והסיקו ש γ ו $\tilde{\gamma}$ שקולות.
   (ד) הראו שאם $\tilde{\gamma}:\left[c,d\right]\to\Gamma$ היא פרמטריזציה חלקה ופשוטה של Γ כך ש $\gamma\left(a\right)=\tilde{\gamma(d)}$ ו $\gamma\left(d\right)=\gamma\tilde{\left(b\right)}$. הראו ש $\tilde{\gamma}$ ו γ הן אנטי־שקולות.
   (ה) הראו שכל $\tilde{\gamma}$ מתקיים $T_{\gamma}=T_{\tilde{\gamma}}$ או $T_{\gamma}=-T_{\tilde{\gamma}}$.

4. תהי $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}^{n}$ עקומה חלקה בעלת תמונה Γ. נגדיר $\phi:\left[a,b\right]\to\left[0,L\left(\gamma\right)\right]$ על ידי

$$\phi\left(t\right)=\int_{a}^{t}\left\Vert \gamma'\left(\tau\right)\right\Vert \mathbf{d}\tau .$$

(א) הראו ש ϕ מונוטונית עולה, חלקה ועל ושאותו הדבר נכון עבור $\phi^{-1}:[0,L]\to[a,b]$.

(ב) חשבו את הנגזרת של ϕ ו ϕ^{-1}.

(ג) הראו שקיימת עקומה חלקה $\tilde{\gamma}:[0,L]\to\Gamma$ כך ש $\|\tilde{\gamma}'(s)\|=1$ לכל $s\in[0,L(\gamma)]$. הערה: עקומה כזאת נקראת בעלת מהירות יחידה. הדרכה: הסכלו על $\gamma\circ\phi^{-1}$.

(ד) הסיקו שכל עקומה חלקה שקולה לעקומה בעלת מהירות יחידה.