תרגיל 6

1. תהא $A \subsetneq \mathbb{R}$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$. הוכיחו כי A לא קשירה.

2. יהי (X,τ) מ״ט. הוכיחו ש (X,τ) טריויאלי אמ״ם לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X.

3. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו $A \subseteq X-$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl\left(A\right) = X$.

   (א) הוכיחו: $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.

   (ב) הוכיחו: $cl\left(U\right) = cl\left(A \cap U\right)$.

4. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

5. האם המרחבים הבאים קשירים?

   (א) $(\mathbb{R} \cup \{p\}, \tau)$ כאשר $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{O \subseteq \mathbb{R} \cup \{p\} : |O^c| < \aleph_0\}$.

   (ב) $(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, O_n\}\forall n$, $O_n = \{0, ..., n\}$.

   (ג) $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה הp- אדית.

6. יהו $A, B \subseteq X$ קבוצות כך ש $A \cap B$ ו $A \cup B$ קשירים. הוכיחו שA, B קשירות.