

בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה 88-195 תשס"ט סמסטר קיץ

מרצים: ד"ר אלי בגנו ומר שי סרוסי

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק**, כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון. המחברות

משמשות לטייטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ציון:

בהצלחה

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 1

תת קבוצה A של קבוצת המספרים הממשיים תקרא "קבוצה מגניבה" אם לכל $x, y \in A$, כך ש $x \neq y$ מתקיים $x - y \notin Q$. (Q היא קבוצת המספרים הרציונליים).

א. (15) הוכיחו שקיימת קבוצה מגניבה $B \subseteq \mathbb{R}$ שהיא מקסימלית ביחס להכלה. כלומר לכל $C \subseteq \mathbb{R}$ כך ש $C \supset B$ (מכילה ממש), C אינה מגניבה.

ב. (5) נניח ש B קבוצה מקסימלית כנ"ל. הוכיחו שלכל מספר ממשי $r \in \mathbb{R}$ קיים $b \in B$ כך שהפרשם רציונלי.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 2

א. (6) בכמה אופנים אפשר לבחור 2 מספרים (שונים) מתוך המספרים 1, ..., 100, כך שסכום המספרים חייב להיות זוגי? (בחרו את התשובה הנכונה והסבירו).

$$.1 \quad \binom{50}{2} \cdot \binom{50}{2} + \binom{50}{2}$$

$$.2 \quad \binom{50}{2} + \binom{50}{2}$$

$$.3 \quad \binom{50}{2} \cdot 50!$$

$$.4 \quad \binom{50+2-1}{50-1}$$

ב. (7) בכמה אופנים אפשר לבחור 3 מספרים (שונים) מתוך המספרים 1, ..., 100, כך שסכום המספרים חייב להיות זוגי? (בחרו את התשובה הנכונה והסבירו).

$$.1 \quad \binom{50}{2} \cdot \binom{50}{2} + \binom{50}{2}$$

$$.2 \quad \binom{50}{3} + \binom{50}{2} \cdot \binom{50}{1}$$

$$.3 \quad \binom{50+3-1}{50-1}$$

$$.4 \quad \binom{50}{2+1} \cdot 3!$$

ג. (7) נתונה קבוצה סופית A . נסמן ב C את קבוצת היחסים על A . מהו מספר הפונקציות החד-חד ערכיות מ C אל A ? נמקו!

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 3

ענה בדיוק על שנים מתוך שלשת הסעיפים הבאים:

- א. (10) מצאו תנאי התחלה ויחס רקורסיה עבור מספר המילים מעל האלף בית $\{0,1,2\}$ באורך n בהן אין רצף של שתי ספרות 2.
- ב. (10) לאריק 10 ברווזים שונים מגומי. כל יום הוא בוחר קבוצה של 3 מתוכם באופן אקראי לארח לו לחברה באמבטיה. בבוקר יום א' בנץ הודיע לאריק שעד סוף השבוע הוא רוצה שכל הברווזים יבקרו באמבטיה. אריק החליט לעצבן את בנץ. בכמה אפשרויות שונות יכול אריק לקחת את הברווזים לאמבטיה, כך שבסוף השבוע יהיה לפחות ברווז אחד שלא ביקר באמבטיה אפילו פעם אחת בשבעת הימים?

(מספיק לכתוב נוסחא אך יש להסביר אותה!)

ג. תהיינה A, B, C, D קבוצות. הוכח או הפרך:

$$(5) (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$(5) A \times B = B \times A \Leftrightarrow (A = \phi) \vee (B = \phi) \vee (A = B)$$

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 4

תהיינה A ו- B קבוצות, B קבוצה אינסופית. נסמן $|A|=a$, $|B|=b$ ונניח ש $1 < a \leq b$.

א. (4) הוכיחו שקימת תת-קבוצה C של B כך ש $|C|=|A|$.

ב. (4) מצאו את $|A \cup B|$. נמקו.

ג. (4) נגדיר $D = \{f \mid f: B \rightarrow A\}$, הוכיחו ש $|D|=2^b$.

ד. (4) הוכיחו שעוצמת הקבוצה $\bigcup_{x \in A} (B \times \{x\})$ היא b .

ה. (4) מצאו את עוצמת הקבוצה הבאה $B \times N \times P(B \times A)$. N היא קבוצת

המספרים הטבעיים). נמקו.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 5

א. (6) הוכח באופן קומבינטורי את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

- ב. נתונות הקבוצות A, B והפונקציות הבאות: $f: A \rightarrow Z, g: B \rightarrow Z$, Z היא קבוצת המספרים השלמים.
נגדיר שתי פונקציות חדשות: $h_1: A \times B \rightarrow Z \times Z$ עי"י $h_1((a,b)) = (f(a), g(b))$.
 $h_2: A \times B \rightarrow Z$ עי"י $h_2((a,b)) = f(a) + g(b)$.

הוכח או הפרך:

1. (5) אם f, g חד ערכיות אז h_1 חד ערכית.
2. (5) אם f, g על אז h_2 על.
3. (4) (5) אם f, g חד ערכיות אז h_2 חד ערכית.

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדרך זה.

שאלה 6

- א. (10) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי $\{R_\alpha\}_{\alpha \in I}$ משפחה של יחסי שקילות על A . הוכיחו ש
 $R = \bigcap_{\alpha \in I} R_\alpha$ הוא יחס שקילות על A .
- ב. (10) לכל n טבעי נסמן $\{R_n = \{(x, y) \in Z \times Z \mid (x - y) \text{ מחלק את } n\}\}$ (המספרים השלמים).
רשמו את R_1 בצורה מפורשת (2).
מצאו עוצמת הקבוצה Z/R_1 (2).
רשמו את $R = \bigcap_{n \in N} R_n$ בצורה מפורשת (3).
מצאו עוצמת הקבוצה Z/R (3).
- יש לנמק כל תשובה!

יש לענות על שאלה זו באופן מפורט בדף זה.

שאלה 7

תהי פונקציה $f: A \rightarrow B$ ויהיו $C \subseteq A, D \subseteq B$. הזכר בשתי ההגדרות הבאות שנתנו בשעור:

$$f[C] = \{f(c) \mid c \in C\}$$

$$f^{-1}[D] = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

א. (6) הוכח ש: $C \subseteq f^{-1}[f[C]]$.

ב. (7) הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $C = f^{-1}[f[C]]$.

ג. (7) תנו דוגמא בה ההכלה בסעיף א היא הכלה ממש.