

תרגיל בית 5

להגשה עד 13.12.2017

1. (משפט לוסין) תהי $f = 1_A$ פונקציה דריכלה בקטע $[0, 1]$, כלומר, $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה סגורה F (מצאו את F ממש) בקטע $[0, 1]$ כך שהצמצום של f על F הינה פונקציה רציפה ומתקיים $m([0, 1] \setminus F) < \varepsilon$.

2. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dm = 0$.
רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

3. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות אי-שליליות f_n השואפות לאפס נקודתית כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = 0$ אבל לא קיימת פונקציה אינטגרבילית g לכל $f_n < g$.

4. הפעילו את למת פאטו עבור מידת לבג על הממשיים על הסדרות הבאות:

i. $1_{(n, n+1)}(x)$

ii. $1_{(n, \infty)}(x)$

iii. $n 1_{\left(0, \frac{1}{n}\right)}(x)$

iv. $1 + \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{2^n x}{2\pi} \right) \right)$

5. תהי $f \geq 0$ פונקציה מדידה לבג כך ש $\int f dm = \infty$. הראו שלכל $M > 0$ קיימת פונקציה g כך ש

$0 \leq g \leq f$ המקיימת:

i. $\int g dm > M$

ii. g חסומה

iii. לתומך של g מידה סופית.