

תרגיל 8

1. הסתכלו על הפונקציה הבאה המוגדרת על $[-1,1]$:

$$f = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- א. האם הפונקציה גזירה?
ב. האם לפונקציה השתנות חסומה?

פתרון:

א. הפונקציה כמובן גזירה והנגזרת הינה

$$f' = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

נראה רק כי הפונקציה אכן גזירה ב $x = 0$. מתקיים $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = 0$

ב.

מספיק לבדוק מהן התנודות בין הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת. נשווה את הנגזרת ל 0 ונקבל

$$2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$$