תרגיל 6

.

1.

(א) יהיו $B=\{(1,0,1),(1,2,3),(0,4,0)\}$ ו$C=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,2)\}$ שני בסיסים ל $\mathbb{R}^3$. מצאו את $[I]_S^B,[I]_C^S$ כאשר $S=\{e_1,e_2,e_3\}$ הבסיס הסטדנטרטי וחשב את $[I]_C^B$.

פתרון: $[I]_S^B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&4\\1&3&0\end{pmatrix}$.

$[I]_S^C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$.

ממשפט: $[I]_C^S=([I]_S^C)^{-1}$.

לכן: $[I]_C^S=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-0.5&0.5\end{pmatrix}$

כעת, ידוע ש $[I]_C^B=[I]_C^S[I]_S^B$, ולכן

$$[I]_C^B=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-0.5&0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&4\\1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&4\\0.5&0.5&-2\end{pmatrix}$$

(ב) יהי וקטור v כך ש $[v]_B=(4,5,6)$, מצאו את $[v]_C$.

פתרון:

$$[v]_C=[I]_C^B[v]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&4\\0.5&0.5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\25\\-7.5\end{pmatrix}$$

2. יהי $B=\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ בסיס ל$\mathbb{R}^3$, ותהי מטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$.

(א) נתון ש $A=[I]_B^C$ עבור איזשהו בסיס C. מצאו את C.

פתרון: יהי בסיס $C=\{c_1,c_2,c_3\}$ כך ש $A=[I]_B^C$. כלומר, עמודות A הן הקורדינטות של איברי C לפי הבסיס B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [c_1]_B \Longrightarrow c_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [c_2]_B \Longrightarrow c_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = [c_3]_B \Longrightarrow c_3 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן $C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

(ב) נתון ש $A = [I]_E^B$ עבור איזשהו בסיס E. מצאו את E.

פתרון: ראשית, נמצא את $[I]_B^E$, ואז נוכל לפתור באותה דרך כמו בסעיף א'.

$$[I]_B^E = ([I]_E^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

כעת,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [e_1]_B \Longrightarrow e_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = [e_2]_B \Longrightarrow e_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = [e_3]_B \Longrightarrow e_3 = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. תהא $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$ ה"ל המוגדרת

$$\forall p(x)\in\mathbb{R}_2[x]:\ T\left(p(x)\right)=\left(p(1),p'(1)\right)$$

כאשר $p(1)$ זה הצבה של 1 בפולינום. ו $p'(1)$ זה הצבה של 1 בנגזרת של הפולינום.

(א) מצא מטריצה מייצגת $[T]_S^E$ כאשר S הבסיס הסטנדרטי ו $E=\left\{1,x,1+x^2\right\}$.
פתרון: נחשב

$$T(1)=(1,0)\,,T(x)=(1,1)\,,T(1+x^2)=(2,2)$$

ולכן

$$[T]_S^E=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

(ב) חשב את $\ker T,ImT$
פתרון: נחשב

$$C\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}=\mathbb{R}^2$$

לכן $ImT=\mathbb{R}^2$ בנוסף

$$N\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}0\\-2t\\t\end{pmatrix}:\ t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\ker T=span\left\{-2x+(1+x^2)\right\}=$$

4. תהא $T:V\to V$ ה"ל. יהא $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס ל V ונתון כי $[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$.

(א) יהא C בסיס אחר ל V. חשב את הדטרמיננטה של $[T]_C^C$. האם T הפיכה?
פתרון: מתקיים

$$[T]_C^C=[I]_C^B\,[T]_B^B\,[I]_B^C$$

ולכן

$$det\,[T]_C^C=det\left([I]_C^B\,[T]_B^B\,[I]_B^C\right)=det\,[I]_C^B\cdot det\,[T]_B^B\cdot det\,[I]_B^C=\frac{1}{det\,[I]_B^C}\cdot 2\cdot\cdot det\,[I]_B^C=2$$

כאשר משתמשים בכך ש $detA^{-1}=\frac{1}{detA}$
ולכן היא הפיכה

(ב) יהא n טבעי חשב $[T^n]_B^B$

פתרון: מתקיים כי

$$[T^n]_B^B = \left([T]_B^B\right)^n$$

נחשב עבור $n=2$ ונגלה כי

$$\left[T^2\right]_B^B = \left([T]_B^B\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 2^2 \end{pmatrix}$$

נחשב עבור $n=3$ ונגלה כי

$$\left[T^3\right]_B^B = \left([T]_B^B\right)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & \\ & & 2^3 \end{pmatrix}$$

ובאופן כללי (אפשר להוכיח גם פורמאלית בעזרת אינדוקציה):

$$[T^n]_B^B = \left([T]_B^B\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \\ & 1 & \\ & & 2^n \end{pmatrix}$$

(ג) נסמן $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ כאשר $v_1' = v_2, v_2' = v_1, v_3' = v_3$ חשב $[T]_{B'}^{B'}$ ומצא מטריצה P הפיכה כך ש

$$[T]_{B'}^{B'} = P\,[T]_B^B\,P^{-1}$$

פתרון: מהגדרת מטריצה מייצגת נקבל כי

$$\begin{aligned} Tv_1 &= v_1 \\ Tv_2 &= v_1 + v_2 \\ Tv_3 &= 2v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$[T]_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

מתקיים

$$[T]_{B'}^{B'} = [I]_{B'}^{B}\,[T]_B^B\,[I]_B^{B'}$$

ולכן נסמן

$$P = [I]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל את המבוקש

בהצלחה!