בוחן - אינפי 3 - 26/12/2016

5 בינואר 2017

שאלה 1 (30 קודות)

חשב את גבולות הבאים:

א) $$lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^3+n^2}}{\sqrt[3]{n^6+2}+\sqrt[3]{n^3+4}}$$

פתרון:

$$lim\frac{\sqrt{3n^3+n^2}}{\sqrt[3]{n^6+2}+\sqrt[3]{n^3+4}}=lim\frac{n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{3+\frac{1}{n}}\right)}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^6}}+\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}{n}\right)}=0$$

ב) $$lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}\right)^{2n^2+1}$$

פתרון:

דרך א:

$$lim\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}\right)^{2n^2+1}=lim\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{\left(2n^2+1\right)\frac{n^2+n+1}{n^2+n+1}}=lim\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{n^2+n+1\cdot\frac{2n^2+1}{n^2+n+1}}=e^2$$

דרך ב': אפשר למצוא את הגבול בעזרת המשפט מתרגיל בית:

משפט: אם $a_n\to 1$ **אזי** $lim\left(a_n\right)^{b_n}\to e^{lim(a_n-1)\cdot b_n}$

ולכן נקבלים שהגבול הוא :

$$lim\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}\right)^{2n^2+1}=e^{lim\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}-1\right)\cdot\left(2n^2+1\right)}=e^{lim\left(\frac{2n^2+1}{n^2+n+1}\right)}=e^2$$

ג) $$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+666^n}$$

פתרון:

$$666^n\leq 1^n+2^n+\cdots+666^n\leq 666\cdot 666^n$$

עכשיו נוציא שורש n-י מכל אחד מהביטויים ונקבל:

$$666\leq\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+666^n}\leq\sqrt[n]{666}\cdot 666$$

שני צידי של אי השוויון שואפים ל־666 ולכן לפי משפט הסנדוויץ נקבל שגם הסדרה שלנו שואפת ל־666 .

ה) $lim_{n\to\infty}\frac{sin(n!)-cos(n^n)}{n}$

פתרון:

$|sin\left(n!\right)-cos\left(n^n\right)|\leq|sin\left(n!\right)|+|cos\left(n^n\right)|\leq2$ ולכן הסדרה $sin\left(n!\right)-cos\left(n^n\right)$ היא סדרה חסומה, $\frac{1}{n}$ היא סדרה ששואפת לאפס ולכן המכפלה שלהן שואפת לאפס.

שאלה 2 (30 נקודות)

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

פתרון:

זהוא טור חיובי ולכן נשתמש במבחן המנה כדי לבדוק את ההתכנסות שלו:

$$lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=lim\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=lim3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=lim3\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=lim3\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{3}{e}>1$$

ולכן לפי מבחן המנה שטור מתבדר

ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$

פתרון: כאן יש לפחות 4 דרכים כדי לפתור את השאלה הזו

דרך א'

נשים לב שכאשר n אי זוגי אז $\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}=0$ ולכן האיברים האלה לא תורמים לסכום הטור ולכן אפשר להציג את הטור שלנו בצורה הבאה:

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}+(-2)^{2k}}{3^{2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot2^{2k}}{3^{2k}}=2\cdot\sum\left(\frac{4}{9}\right)^k$, קיבלנו טור של בדרה הנדסית עם מנה $|q|<1$, ולכן הוא מתכנס.

דרך ב'

נרשום את הטור בצורה הבאה: $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, כל אחד מהטורים האלה הוא טור הנדסי עם מנה שקטנה בערך מוחלט מ־1 ולכן הטור מתכנס וקל מאוד לחשב את סכומו.

דרך ג'

נציג את הטור כמו שהצגנו בדרך ב' ונשים לב שהטור הראשון הוא טור הנדסי עם מנה שקטנה בערך מוחלט מ־1 , ואילו בטור השני הוא טור ליבניץ ולכן מתכנס, ולכן סכום של שני טורים מתכנסים הוא טור מתכנס.

דרך ד'

אפשר להישתמש במבחן השורש של קושי , אבל בגרסה שראיתם בהרצאה של ארז:

בהיתנן טור חיובי $\sum a_n$, אם $\overline{lim}\sqrt[n]{a_n} < 1$ אזי הטור מתכנס, אם זה גדול מאחד אז מתבדר, אם שווה לאחד אז לא ניתן לדעת לפי מבחן השורש.

במקרה שלנו : $\overline{lim}\sqrt[n]{\frac{(-2)^n+2^2}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1$ ולכן הטור מתכנס.

ג) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(lnn)^{\frac{3}{2}}}$$

פתרון:

נשתמש במבחן העיבוי:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(ln2^n)^{\frac{3}{2}}} = \sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(ln2)^{\frac{3}{2}}} < \infty$ כלומר הטור הזה מתכנס כי חזקה של n שבמכנה גדולה מ־1 ולכן לפי מבחן העיבוי גם הטור שלנו מתכנס.

שאלה 3 (30 נקודות)

תהי $\{a_n\}$ סדרה כך ש $\forall n : a_n \neq 0$ המקיימת $\forall n : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$,

א) הוכח או הפרך: $\overline{lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

פתרון:

נפריך: נבחר למשל את הנסדרה $a_n = \frac{n}{n+1}$ ולכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$ $\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$ ולכן n אבל $\overline{lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{lim}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1$.

ב) הוכח או הפרך: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

פתרון:

לפי הנתון $a_1 \neq 0$ וגם $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ לכל n ולכן $|a_{n+1}| \geq |a_1| > 0$ ולכן סדרה $|a_n|$ אינה שואפת ל־0 ולכן גם a_n לא שואפת לאפס ולכן תנאי הכרחי להתכנסות הטור לא מתקיים ולכן הטור מתבדר.

שאלה (30 נקודות)

תהי סדרה $\{a_n\}$ נתבונן בתתי סדרות שלה:

$$\{b_k\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$$

$$\{c_j\}_{j=1}^{\infty} = \{a_{3j}\}_{j=1}^{\infty}$$

ונתון כי $lim_{k\to\infty}b_k = L$ ו־$lim_{j\to\infty}c_j = M$.

א) הראו ש: $L = M$

פתרון:

נתבונן בסדרה $\{a_{6k}\}_{k=1}^{\infty}$, סדרה זו היא כמובן תת סדרה של $\{b_k\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ ולכן מתקיים $lim a_{6k} = lim b_k = L$, מצד שני $\{a_{6k}\}_{k=1}^{\infty}$ גם תת סדרה של $\{c_j\} = \{a_{3j}\}$ ולכן

$lim a_{6k} = lim c_j = M$ ולכן מיחידות הגבול נקבל: $L = M$.

ב) הוכיחו או הפריכו: הסדרה a_n מתכנסת.

פתרון:

הפרכה: נגדיר סדרה $\{a_n\}$ בצורה הבאה:

$$a_n = \begin{cases} 5 & 2|n \vee 3|n \\ 7 & otherwise \end{cases}$$

$lim b_k = lim c_k = 5$. אבל ברור שלסדרה $\{a_n\}$ קיים גבול חלקי נוסף שהוא שווה ל־7 ולכן הסדרה מתבדרת.