

מד"ר למתמטיקאים – תרגיל 3

1. א. מצאו בשיטת קירובי Picard את ארבעת הקירובים הראשונים למד"ר:

$$y' = x - y, y(0) = 0.$$

ב. נחשו צורתו הכללית של הקירוב $y_n(x)$ והוכיחו השערתכם באינדוקציה.

ג. חשבו את הפיתרון המדויק y והוכיחו כי $y_n \rightarrow y$ במידה שווה על כל הישר הממשי.

ד. עבור המלבן $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ - העריכו את השגיאה בחישוב $y(\frac{1}{2})$ על ידי הקירוב מסדר n .

2. משוואות אוילר (מסדר שני) היא משוואה מהצורה :

$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, x > 0$ כאשר β, α ממשיים. שינוי המשתנה $t = \ln x$ מעבירה את משוואת אוילר למשוואה במקדמים קבועים.

א. בעזרת הצבה זו פתרו את: $x^2 y'' + x y' + y = 0, x > 0$.

ב. ראינו כי אם מחפשים פיתרון למשוואות אוילר שצורתו x^r מקבלים משוואה

$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ שאת שורשיה מחפשים, וראינו את צורת הפתרונות למשוואה כתלות באופי השורשים הנ"ל (שונים, זהים, מרוכבים).

פתרו את :

$$1. \quad x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0 \quad 2. \quad x^2 y'' + 3x y' + 5y = 0$$

3. לפי משפט, עבור המד"ר $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ כך שהנקודה

x_0 רגולרית (כלומר, כי $\frac{Q}{P}, \frac{R}{P}$ ניתנות לפיתוח לטור חזקות מסביב לנקודה

הנ"ל, אז הפיתרון הכללי למד"ר זה הוא מהצורה $y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ כאשר a_0, a_1 קבועים ו- y_i פתרונות בעלי פיתוח לטור בעלי רדיוס התכנסות גדול לפחות משל המינימום מבין אלו של $\frac{Q}{P}, \frac{R}{P}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה ו-4 איברים ראשונים בטור הפיתרון סביב האפס לבעייה :

$$y'' + (x-1)y' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

ב. משוואת Hermite היא מהצורה

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, -\infty < x < \infty, \text{ כאשר } \lambda \text{ פרמטר קבוע}$$

מיצאו את ארבעת האיברים הראשונים בשני הפתרונות הבלתי תלויים מסביב לאפס, והראו שאם λ מספר שלם זוגי אי שלילי אז אחד משני הפתרונות הוא פולינום. מצאו פולינומים אלו עבור $\lambda = 0, 2, 4$.

4. שיטת פרובניוס לפיתרון מסביב לנקודה סינגולארית – רגולרית:

פיתרו את המד"רים הבאים (כלומר מצאו את הפתרון הכללי עבורן):

א. $x > 0$, $x^2 y'' - xy' + (1-x)y = 0$, ליד $x = 0$

ב. $x^2 y'' + (x^2 + 2x)y' - 2y = 0$ ליד $x = 0$

ג. מצאו פתרון כללי (אפשר לפתח עד שלושה איברים בטור) סביב לנקודה הסינגולארית רגולרית:

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0$$