

תרגיל בית 3

לפעמים יש לנו מידה על קבוצה X עם σ -אלגברה כלשהי ואנו רוצים להסתכל רק על תת קבוצה של A , $B \subseteq A$. לדוגמא, אנו רוצים לצמצם את מידת לבג על הקטע $[0,1]$. על מנת לעשות זאת נוכיח שתי טענות.

1. תהי S סיגמא אלגברה על X ותהי B קבוצה מדידה ב S . הוכיחו כי $S_B = \{E \mid E = A \cap B, A \text{ is } S \text{ measurable}\}$ הינה סיגמא אלגברה על B .

2. הוכח כי אם (X, S, μ) הינו מ"ח, $B \in S$, ונגדיר $\nu(A) = \mu(A \cap B)$ עבור $A \in S$ אזי ν הינה מידה.

3. יהי (X, S) מרחב מדיד ו μ הינה פונקציית קבוצות חיובית ואדיטיבית סופית וכך ש $\mu(\emptyset) = 0$. נניח שאם A_n הינה סדרת קבוצות עולה אז מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$. הראו כי μ הינה מידה.

4. יהיו $\mathcal{A}_1$ ו $\mathcal{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.