מבוא לטופולוגיה - תרגיל 1

1. יהיו A, B, C תת קבוצות של הקבוצה X.
<u>הוכיחו/הפריכו</u> שארבעת הטעינות הבאות <u>שקולות</u>
(זאת אומרת, כולן מתקיימות או כולן לא מתקיימות):
1) $A \subseteq B$
2) $A \cap B = A$
3) $A \cup B = B$
4) $B^c \subseteq A^c$

2. יהיו $g: A \to B, f: B \to C$ פונקציות.
<u>הוכיחו/ הפריכו:</u>
א' אם $f \circ g$ היא חח"ע, אז g היא חח"ע.
ב' אם $f \circ g$ היא על, אז f היא על.

3. תיהי: $f: A \to B$ פונקציה ו- $C \subseteq B$, ו- $D \subseteq A$.
אי הוכיחו ש-$f\left(f^{-1}(C)\right) \subseteq C$ ו- $f^{-1}\left(f(D)\right) \supseteq D$
ב' הוכיחו ש-$f\left(f^{-1}(C)\right) = C$ אם f פונקצית על
ו- $f^{-1}\left(f(D)\right) = D$ אם f פונקציה חח"ע.
ג' תנו דוגמאות נגדיות כאשר $D \subset f^{-1}\left(f(D)\right)$

4. יהיו $X.Y$ קבוצות $A, B \subseteq X;\ C, D \subseteq Y$ - תת קבוצות, $A_\alpha(\alpha \in I)$ ו-
$B_\beta(\beta \in J)$ משפחות תת קבוצות ב-X, ו- $f: A \to B$ - פונקציה.
הוכיחו:
א' $(\forall_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq B) \Longrightarrow (\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq B$
ב' $\forall_{\beta \in I}((\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq A_\beta)$
ג' $(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
ד' $(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
ה' $B \cup (\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$
ו' $B \cap (\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$
ז' $(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cup \left(\cap_{\beta \in J} B_\beta\right) = \cap_{\alpha \in I, \beta \in J} (A_\alpha \cup B_\beta)$

ח' $(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) \cap \left(\cup_{\beta\in J} B_\beta\right) = \cup_{\alpha\in I,\beta\in J} (A_\alpha \cap B_\beta$

ט' $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$

י' $C \subseteq D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

כ' $f(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

ל' $f(\cap_{\alpha\in I} A_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

מ' $f^{-1}(\cap_{\alpha\in I} C_\alpha) = \cap_{\alpha\in I} f^{-1}(C_\alpha)$

נ' $f^{-1}(\cup_{\alpha\in I} C_\alpha) = \cup_{\alpha\in I} f^{-1}(C_\alpha)$

5. יהיה (M,d) מרחב מטרי הוכיחו ש-

א' לכל $x,y,z \in M$ מתקיים: $|d(x,y) - d(y,z)| \le d(x,z)$

ב' לכל $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ מתקיים:

$d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n)$.

6. <u>הגדרה.</u> יהיה M מרחב מטרי. הסדרה $x_n \in M$ נקראת *קבועה לבסוף* אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ וקיים $a \in M$ כך ש- $n \ge n_0 \Rightarrow x_n = a$.

א' הוכיחו שסדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

ב' תהי x_n סדרה במ"מ (M,d) המתכנסת ל-x וקיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $x_m \ne x_n$ מתקיים $d(x_m,x_n) \ge \varepsilon_0$. הוכיחו שסדרה x_n קבועה לבסוף.

ג' תהי x_n סדרה במ"מ (M,d) המתכנסת ל-x. תהי $\{x_n\} \subseteq M$ תת קבוצה סופית. הוכיחו שסדרה x_n קבועה לבסוף.

7. *<u>תזכורת</u>*. הפונקציה $\rho: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x,y \in \mathbb{R}$: $\rho(x,y) = |x-y|$ היא מטריקה על $\mathbb{R}$.

יהיה M מרחב מטרי ו- $a \in M$. נגדיר פונקציה $f: (M,d) \to (\mathbb{R},\rho)$ כך שלכל $x \in M$: $f(x) = d(x,a)$.

הוכיחו ש- f רציפה.