מבחן מועד ג' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 19/07/16

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2(x)\right)\cdot e^{\sin(x)}}{x\cdot\ln(1+x)}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(sin^2(x))}{sin^2(x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{\to 1^2}\cdot\underbrace{e^{\sin(x)}}_{\to e^0}\cdot\underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\to 1}=1$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}=\{\infty^0\}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^0$$

כאשר המעבר האחרון לפי סדרי גודל (אפשר לעשות לופיטל על מנת להיות בטוחים).

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{3^{4n+1}}$

$$\frac{2^{(n^2)}}{3^{4n+1}}=\left(\frac{2^n}{3^{4+\frac{1}{n}}}\right)^n\to\left\{\left(\frac{\infty}{3^4}\right)^\infty\right\}=\infty$$

2.

א. חשבו את $\int\frac{\cos(x)}{\sin^4(x)+\sin^2(x)}dx$.

$$\int\frac{\cos(x)}{\sin^4(x)+\sin^2(x)}dx=\left\{\begin{matrix}t=\sin(x)\\ dt=\cos(x)\,dx\end{matrix}\right\}=\int\frac{1}{t^4+t^2}dt=$$

$$\frac{1}{t^4+t^2}=\frac{1}{t^2(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים ונקבל:

$$\frac{1}{t^4+t^2}=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}$$

$$=\int\frac{1}{t^4+t^2}dt=-\frac{1}{t}-\arctan(t)+C=-\frac{1}{\sin(x)}-\arctan(sin(x))+C$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^1 \ln(x)dx$, אם כן חשבו אותו.

נזכור מהכיתה כי

$$\int \ln(x)\,dx = xln(x) - x$$

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = [x\ln(x) - x]_0^1 = 1 \cdot \ln(1) - 1 - \lim_{x\to0^+}(xln(x) - x) = -1$$

כאשר גם את הגבול

$$\lim_{x\to0^+} xln(x) = 0$$

ראינו בכיתה.

במבחן תפרט על הדברים הללו.

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^3 + x = 1$, והוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = x^3 + x - 1$$

$$h'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

לכן יש לכל היותר פתרון יחיד.

כעת נשים לב כי

$$h(0) = -1$$
$$h(1) = 1$$

לפי ערך הביניים כיוון שהפונקציה רציפה כצירוף רציפות היא חותכת את הציר בין 0,1.

סה"כ פתרון יחיד

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^3 + x + \cos(x) = 1$, והוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$g(x) = x^3 + x + \cos(x) - 1$$

$$g'(x) = 3x^2 + 1 - \sin(x) > 0$$

הסבר: לכל $x \neq 0$ מתקיים כי $3x^2 > 0$ והרי $1 - \sin(x) \geq 0$

עבור $x = 0$ מתקיים כי $g'(0) = 1 > 0$

לכן הפונקציה g עולה (ממש) ויש לכל היותר פתרון אחד.

נשים לב כי

$$g(0) = 0$$

ולכן קיים פתרון, והוא יחיד.

4. (אין קשר בין הסעיפים)

א. תהי פונקציית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

תהי f פונקציה כלשהי המקיימת לכל $x\in\mathbb{R}$ כי $f(x)=f(D(x))$.

הוכיחו כי f פונקציה קבועה.

אם $x\in\mathbb{Q}$ אזי

$$f(x)=f(1)$$

אם $x\notin\mathbb{Q}$ אזי

$$f(x)=f(0)$$

נותר רק להוכיח כי $f(0)=f(1)$

$$f(0)=f\big(D(0)\big)=f(1)$$

ולכן הפונקציה קבועה.

ב. תהיינה f,g גזירות ב $[0,\infty)$ כך ש $f(0)=g(0)$ ולכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים כי $f'(x)>g'(x)$.

הוכיחו כי לכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $f>g$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$$

לכן h עולה

כמו כן,

$$h(0)=f(0)-g(0)=0$$

ולכן לכל $x>0$ מתקיים כי $h(x)>h(0)=0$ כפי שרצינו.

5. תהי סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n^2+1$ ותנאי ההתחלה $a_1>0$

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

$$a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_n+1>0$$

הרי זו פרבולה מרחפת $x^2-x+1>0$

ב. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, כיוון שהיא עולה היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו $a_n\to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1}=\lim a_n^2+1$$

$$L=L^2+1$$

$$L^2 - L + 1 = 0$$

אין פתרונות למשוואה זו, ולכן קיבלנו סתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה ומתקיים כי $a_n \to \infty$

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n + \frac{k^2}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

כלומר מדובר בסדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ הרציפה בקטע $[0,1]$ ולכן לפי המשפט שלמדו בכיתה

$$a_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

ב. חשבו את $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ עד רמת דיוק של $h = 0.01$.

תרגיל זה דיי מאתגר, כי כל גישה ישירה ע"י טיילור מביאה לשגיאה שקטנה מאד לאט.

נראה דרך מתוחכמת ויפה לפתור את התרגיל:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad a = 0, \quad x = ?$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}$$

$$2 + 2x = 1 - x$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{2}{(1-x)^3}$$

ננחש $n = 2$

לפי לגראנז' קיימת $-\frac{1}{3} < c < 0$ כך ש

$$R_2=\frac{f'''(c)}{3!}\left(-\frac{1}{3}-0\right)^3=-\frac{1}{3^4}\cdot\left(\frac{1}{(1+c)^3}+\frac{1}{(1-c)^3}\right)$$

$$\frac{1}{(1+c)^3}\leq\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\frac{1}{(1-c)^3}\leq 1$$

$$|R_2|\leq\frac{1}{3^4}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3+1\right)>\frac{1}{100}$$

לא מספיק טוב, ננסה עבור $n=3$

$$f''''(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}+\frac{6}{(1-x)^4}$$

ובאופן דומה:

$$|R_3|=\frac{6}{4!}\left|-\frac{1}{(1+c)^4}+\frac{1}{(1-c)^4}\right|\cdot\left(-\frac{1}{3}-0\right)^4\underset{\text{אי שיוויון המשולש}}{\leq}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\left(\frac{1}{(1+c)^4}+\frac{1}{(1-c)^4}\right)$$

$$\leq\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^4}+\frac{1}{(1-0)^4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^4+1\right)>\frac{1}{100}$$

עדיין לא טוב!

ננסה $n=4$

$$f^{(5)}(x)=24\left(\frac{1}{(1+x)^5}+\frac{1}{(1-x)^5}\right)$$

ולכן באופן דומה

$$|R_4|\leq\frac{24}{5!}\cdot\frac{1}{3^5}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5+1\right)<\frac{1}{100}$$

ייאי! נחשב את פולינום הטיילור של הפונקציה מסדר 4

$$P_4=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4=$$
$$=2x+\frac{4}{3!}x^3=2x+\frac{2}{3}x^3$$

ולכן סה"כ

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)\approx P_4\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3$$