מבוא לטופולוגיה – תרגיל 5

1. יהיו σ ו- τ טופלוגיות על $\mathbb{R}$ כאשר τ מושרת על ידי מטריקה אוקלידית ו-σ היא טופולוגית זורגנפריי.
(תזכורת: $\sigma = \left\{ \cup_{\alpha\in I}[a_\alpha, b_\alpha) \mid a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}, a_\alpha \le b_\alpha \right\}$, כאשר אנחנו מתכוונים את <u>כל האחודים האפשריים</u> של הקטעים החצי פתוחים מימין.)
יהיו $s_{\tau\sigma}: (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},\sigma)$, $s_{\sigma\tau}: (\mathbb{R},\sigma) \to (\mathbb{R},\tau)$ שתי פונקציות כך ש- $s_{\sigma\tau}(x) = s_{\tau\sigma}(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
איזו משתי הפונקציות (או שתיהן) :
א) רציפה ?
ב) פתוחה ?
ג) סגורה ?
ד) היא הומאומורפיזם ?
נמקו.

2. תהי פונקציה $f: (X_1, \tau_1) \to X(X_2, \tau_2)$ רציפה. $\tau_1 \subseteq \sigma_1, \tau_2 \supseteq \sigma_2$.
תוכיחו: $f: (X_1, \sigma_1) \to X(X_2, \sigma_2)$ רציפה.

3. יהיו X, Y, Z מרחבים טופולוגיים ויהיו $f: X \to Y, g: Y \to Z$,פונקציות כך ש- f – רציפה בנקודה a , g – רציפה בנקודה $f(a)$.
תוכיחו: $g \circ f$ רציפה בנקודה a .

4. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים כך שלכל שתי נקודות $b_1 \neq b_2$ ב-Y קיימות סביבות $b_1 \in V_1 \subseteq Y$ ו- $b_2 \in V_2 \subseteq Y$ הלא נחתכות, ז"א, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
(במקרה כזה אומרים ש-Y *הוא מרחב האוסדורף*).
יהיו $f, g: X \to Y$ שתי העתקות הרציפות.
תוכיחו שהקבוצה $F = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ היא קבוצה סגורה ב-X.

5. תוכיחו תכונות בסיסיות של סגור ופנים
(אפילו אם חלקן הוכח בהרצאה):

(a) $A \subseteq \bar{A}$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

(c) $\bar{A}$ קבוצה סגורה

(d) אם F קבוצה סגורה ו-$A \subseteq F$ אזי $\bar{A} \subseteq F$

(e) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

(f) A סגורה $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

(g) נקודה p שייכת ל- $\bar{A}$ $\Leftrightarrow$ כל סביבה של p נחתכת עם A.

(h) A° קבוצה פתוחה.

(i) A° היא קבוצה של כל הנקודות הפנימיות ב-A.

(j) אם U קבוצה פתוחה ו-$U \subseteq A$ אזי $U \subseteq A^\circ$

(רמז: סדר נכון של הוכחת הסעיפים יקל את העבודה)

6. תהי A תת-קבוצה במרחב טופולוגי.

א) תוכיחו: $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

ב) תוכיחו ש- $\bar{A} - A^\circ$ קבוצה סגורה.

7. תהי $f: X \to Y$ הומאומורפיזם. תכיחו:

א) $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

ב) $f(A^\circ) = \left(f(A)\right)^\circ$