בס"ד

שיטות נומריות- תרגיל מספר 1- פתרון

.1

א. $(1+0)\cdot 2^{1-8} = 2^{-7} = {}^{1}\!/_{128} = 0.0078125$

ב. $\varepsilon_{machine} = \frac{1}{2}\cdot\beta^{1-p} = \frac{1}{2}\cdot 2^{1-3} = 2^{-3} = {}^{1}\!/_{8}$

ג. $2\cdot(2^4-1)\cdot(2^3)+1 = 241$

.2

(א) $\left(1+2^{-3}+2^{-5}+2^{-6}\right)\cdot 2^8 = 256+32+8+4 = 300$

(ב)

$$-\left(1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-5}+2^{-7}+2^{-16}+2^{-23}\right)\cdot 2^{-111} = -7.3727598022524091543113717985725\text{e-}34$$

(ג)

מספר float: 0 10000101 10111100111011111001111

(ד)

מספר float : 1 10000100 11111011100110011001101

.3

$$\Delta f = \Delta y\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \Delta y\cdot\left|\frac{-1}{x-y}\right| \le 0.5\cdot 10^{-6}\cdot\frac{1}{35-\sqrt[3]{35^3-1}} \approx 1.837\cdot 10^{-3}$$

השגיאה האמיתית (הערך האמיתי של $f(35) = -8.209300637002766$):

$$\sqrt[3]{35^3-1} \approx 34.999728;\ f_{approx} \le \ln(35-34.999728) \approx -8.209708491659113$$

$$\Delta f = f_{exact} - f_{approx} \le 4.078546563466290\text{e-}004$$

<u>הצעה לשיפור א'</u> :

$$f(x) = \ln\left(x-\sqrt[3]{x^3-1}\right) = \ln\left(\frac{x^3-\left(\sqrt[3]{x^3-1}\right)^3}{x^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-1}+(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-1}+(x^3-1)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

נעריך את השגיאה:

$$\Delta f = \Delta y\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \Delta y\cdot\left|\frac{\left(x^2+xy+y^2\right)\left(x+2y\right)}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}\right| = \Delta y\cdot\left|\frac{\left(x+2y\right)}{\left(x^2+xy+y^2\right)}\right| \approx 1.429\cdot 10^{-8}$$

השגנו שיפור משמעותי בערך השגיאה של f .

<u>הצעה לשיפור ב'</u>:

$$g(y)=\sqrt[3]{x^3-y},$$

$$f(x)=\ln\left(x-\sqrt[3]{x^3-1}\right)=\ln(g(0)-g(1))\approx\ln((0-1)\cdot g'(0))=\ln\left(\frac{1}{3x^2}\right)=\text{-8.209308411646937}$$

$$\Delta\left(\text{x-}\sqrt[3]{x^3-1}\right)\approx\frac{1}{2}g''(0)=\frac{1}{9\cdot 35^5}=2.11552\cdot 10^{-9};\ \Delta f\ =2.11552\cdot 10^{-9}\cdot\frac{1}{35-\sqrt[3]{35^3-1}}\approx 7.7745\cdot 10^{-6}$$

השגיאה האמיתית שהתקבלה:

$$\Delta f\ =\text{-8.209300637 - (-8.209308412)}=7.7746\cdot 10^{-6}$$

כאן השגיאה היא לא קטנה כמו בהצעה הקודמת, אך עדיין קטנה משמעותית לעומת החישוב הישיר.

<u>הצעה לשיפור ג'</u> (שיפור נוסף של ב'):

$$g(y)=\sqrt[3]{35^3-y}$$

$$g(y)=g(0)+g'(0)(y-0)+\frac{1}{2}g''(0)(y-0)\wedge 2+R_3(y)$$

$$g(1)=35-\frac{1}{3\cdot 35^2}-\frac{1}{9\cdot 35^5}+R_3(1)$$

נעריך את השגיאה ע"י שיערוך של $R_3(1)$:

$$R_3(1)\approx\frac{1}{6}g'''(0)=-\frac{5}{3^4\cdot 35^8}=2.741199416\cdot 10^{-14}$$

$$\Delta f\ \approx 2.741\cdot 10^{-14}\cdot\frac{1}{35-\sqrt[3]{35^3-1}}=1.007382953384995\cdot 10^{-10}$$

השגיאה בפועל:

$$f_{approx}\ =\ln\left(\frac{1}{3\cdot 35^2}+\frac{1}{9\cdot 35^5}\right)=\text{-8.209300637138773}$$

$$\Delta f\ \ =\ f_{exact}-f_{approx}\ =1.3601\cdot 10^{-10}$$

.4

פתרון:
המטרה היא להימנע מהמצבים כמו הפרש של מספרים קרובים מאוד שעלול להביא להתבטלות של ספרות משמעותיות עקב שגיאת עיגול

א. $$y=\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)\frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)}$$

ב. $$y=\frac{1-x}{1+x}-\frac{1}{3x+1}=y=\frac{(1-x)(3x+1)-(1-x)}{(1+x)(3x+1)}=\frac{x-3x^2}{(1+x)(3x+1)}=\frac{x}{1+x}\frac{1-3x}{1+3x}\underset{x\to 0}{\to} x$$

ג. $$y=\sin x-\tan x\underset{Taylor}{=}x-\frac{x^3}{6}+\ldots-\left(x-\frac{x^3}{3}+\ldots\right)\approx-\frac{x^3}{2}$$

ד. $$f=\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}=\ln z\underset{Taylor\ around\ 1}{=}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{k}\underset{z\to 1}{\approx} z-1$$

.5

א. $$f_1\left(\frac{5}{6}\right)=f_2\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)=f_3\left(\frac{11}{6}\right)=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

ב. $C_1=\left|\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x}{\sqrt{x}}\right|=\frac{1}{2}$ לכל x , בפרט עבור $x=\frac{5}{6}$.

$C_2=\left|\frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\cdot x}{\sqrt[4]{x}}\right|=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}+1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$ לכל x , בפרט עבור $x=\sqrt{\frac{5}{6}}$.

$$C_3=\left|\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot x}{\sqrt{x-1}}\right|_{x=\frac{11}{6}}=\frac{x}{2(x-1)}\Big|_{x=\frac{11}{6}}=\frac{11}{10}$$

ג. החישוב הכי טוב הוא בעזרת פונקציה שנייה כיוון שמספר מצב עבורה הכי קטן בין השלושה והחישוב הכי גרוע הוא בעזרת פונקציה שלישית כי המספר המצב עבורה הכי גבוה.

.6

פתרון :

נחשב את השגיאות על פי הנוסחאות:

$$\Delta f(x,y,z) = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot \Delta z \qquad \delta f(x,y,z) = \left|\frac{\Delta f(x,y,z)}{f(x,y,z)}\right|$$

ולכן:

$$\Delta f_1 \le |100x^4| \cdot \Delta x + |2y| \cdot \Delta y + |-3| \cdot \Delta z = 1600\Delta x + 10\Delta y + 3\Delta z \le 1613 \cdot 0.01 = 16.13$$

$$\delta f_1 \le \left|\frac{1613}{20 \cdot 2^5 + 5^2 - 3 \cdot 6}\right| = \frac{16.13}{647} \approx 0.0249$$

$$\Delta f_2 \le \left|\frac{2(\ln x + 5z)}{y} \cdot \frac{1}{x}\right| \cdot \Delta x + \left|-\frac{(\ln x + 5z)^2}{y^2}\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{2(\ln x + 5z)}{y} \cdot 5\right| \cdot \Delta z = \frac{\ln 2 + 30}{5} \cdot \Delta x + \frac{(\ln 2 + 30)^2}{25} \cdot \Delta y + 2(\ln 2 + 30) \cdot \Delta z \approx 1.05$$

$$\delta f_2 \le \left|\frac{1.05}{\frac{(\ln 2 + 5 \cdot 6)^2}{5}}\right| \approx 5.57 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta f_3 \le |e^{2xy} \cdot 2y| \cdot \Delta x + |e^{2xy} \cdot 2x| \cdot \Delta y + |\cos(zy) \cdot z| \cdot \Delta z = (e^{20} \cdot 10) \cdot \Delta x + (e^{20} \cdot 4) \cdot \Delta y + 6 \cdot \cos 30 \cdot \Delta z \approx 6.793 \cdot 10^7$$

$$\delta f_3 \le \left|\frac{6.793 \cdot 10^5}{e^{20} + \sin 30}\right| \approx 1.4 \cdot 10^{-3}$$

7.

פתרון:

א.

- $+001 \quad +1234567$
- $+004 \quad +1234567$
- $+012 \quad -1007247$
- $+000 \quad +2468473$
- $-043 \quad -6200000$

ב. $\varepsilon_{machine} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-p} - \frac{1}{2} \cdot 10^{1-7} = 0.5 \cdot 10^{-6}$

8.

א. ניעזר במשפט הקוסינוסים ונקבל כי: $\Delta c = \frac{\Delta c^2}{2c} = 0.03532$, כלומר

$c = 3.63941 \pm 0.03532$

ב. כאן לחישוב השגיאה של Δc^2 נכנס עוד גורם אחד שהתווסף עקב העגלת הערך של הקוסינוס (שנלקח מטבלה עם דיוק סופי), כלומר

$$\Delta c^2 = \Delta a \cdot \left|\frac{\partial c^2}{\partial a}\right| + \Delta b \cdot \left|\frac{\partial c^2}{\partial b}\right| + \Delta \gamma \cdot \left|\frac{\partial c^2}{\partial \gamma}\right| + \Delta(\cos\gamma) \cdot \left|\frac{\partial c^2}{\partial(\cos\gamma)}\right| =$$

$$\Delta \mathrm{c} = \frac{\Delta c^2}{2c} = \frac{4.27711}{2 \cdot 3.63941} = 0.58761$$

ג. הבעיה שלנו בסעיף ב' נבעה ממקדם גדול מדי לפני $\Delta(\cos\gamma)$, ננסה להקטין אותו. נשים לב שלכל הערכים בטבלה זו יש אותה השגיאה המוחלטת בדיוק ($0.5*10^{-4}$), לכן מותר לנו לעשות את הדבר הבא: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{1-\sin^2\gamma}$.

עכשיו במקום הגורם של שגיאת הקוסינוס מתווסף לשגיאה הכוללת הגורם של סינוס, אבל מה שחשוב – הוא קטן מזה של הקוסינוס בסעיף הקודם:

$$\Delta c^2 = \Delta a \cdot \left|\frac{\partial c^2}{\partial a}\right| + \Delta b \cdot \left|\frac{\partial c^2}{\partial b}\right| + \Delta \gamma \cdot \left|\frac{\partial c^2}{\partial \gamma}\right| + \Delta(\sin\gamma) \cdot \left|\frac{\partial c^2}{\sin\gamma}\right| =$$

$$\Delta \mathrm{c} = \frac{\Delta c^2}{2c} = \frac{0.327284}{2 \cdot 3.63941} = 0.04496$$

9. התבטלות...