

5. הוכיחו שמ"ט X הוא מרחב האוסדורף אם"ם לכל $x \in X$ מתקיים:

$$\bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F = \{x\}$$

הוכחה. כיוון 1, יהי מ"ט האוסדורף. נוכיח שתי הכלות:
ההכלה ראשונה:

$$\{x\} \subseteq \bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F$$

פנים של קבוצה במ"ט מוכל בקבוצה עצמה. לכן לכל F סגורה כך ש- $x \in F^\circ \subseteq F$ מתקיים $x \in F$. מכאן:

$$x \in \bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F \Rightarrow \{x\} \subseteq \bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F$$

ההכלה השנייה:

$$\bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F \subseteq \{x\}$$

נניח, $x \neq y$. כיוון שהמרחב הוא מ"ט האוסדורף, קיימות סביבות U_x, V_y כך ש- $x \in U_x, y \in V_y$ ו- $U_x \cap V_y = \emptyset$. נסמן: $F_0 := V_y^c$. לכן $y \notin F_0$.

F_0 סגורה ו- $U_x \subseteq F_0$. לכן $x \in F_0^\circ$. כיוון ש- $y \notin F_0$:

$$y \notin \bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F$$

כלומר, החיתוך לא מכיל איברים שונים מ- x , זאת אומרת:

$$\bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F \subseteq \{x\}$$

על סמך שתי ההכלות אנחנו תוענים שמתקיים השוויון
הנדרשת מש"ל.

כיוון 2. נניח לכל $x \in X$ מתקיים השוויון:

$$\bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F = \{x\}$$

ויהיו $a \neq b \in X$ אזי

$$b \notin \bigcap_{\substack{F^\circ \ni a \\ F-\text{סגורה}}} F, \quad a \notin \bigcap_{\substack{F^\circ \ni b \\ F-\text{סגורה}}} F$$

לכן קיימות שתי קבוצות:

$F_a \subseteq X$ סגורה כך ש- $a \in F_a^\circ$ ו- $b \notin F_a$
 $F_b \subseteq X$ סגורה כך ש- $b \in F_b^\circ$ ו- $a \notin F_b$.
 לכן $a \in F_b^c$.

נסמן $U_a = F_a^\circ \cap F_b^c$ ו- $V_b = F_b^\circ$.

אזי $a \in U_a, b \in V_b$

חוץ מזה, U_a קבוצה פתוחה כי היא חיתוך של שתי פתוחות: פנים
ומשלים של קבוצה סגורה. V_b פתוחה כפנים.

ולבסוף U_a, V_b זרות כי $V_b \subseteq F_b$ ו- $U_a \subseteq F_b^c$.

כך מצאנו לשתי נקודות שונות שתי סביבות שמבדילות את הנקודות
זו מזו, מש"ל.