נגזרות חלקיות

הגדרה

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (פונקציה). תהי (נקודה פנימית, interior) $\vec{p} \in int(\Omega)$. נסמן $\vec{p} = (p_1, ...p_m)$.

הנגזרת החלקית ה-kית (או, הנגזרת החלקית לפי משתנה x_k) של f בנקודה $\vec{p}$ תסומן ע"י $\frac{\partial f}{2x_k}(\vec{p})$ או $f'_{x_k}(\vec{p})$ ותוגדר כך:

$$\frac{\partial f}{2x_k}(\vec{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, ...p_k + h, ...p_n) - f(\vec{p})}{h}$$

הגדרה

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ פונקציה. נגדיר $f = (f_1, ...f_m)$ ו-$f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ לכל $1 \leq i \leq m$.

הנגזרת החלקית לפי משתנה x_k של f:

$$\frac{\partial f}{2x_k}(\vec{p}) := \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\vec{p}), ... \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\vec{p}) \right)$$

הסבר

הכוונה בנגזרת חלקית k להתייחס לכל שאר המשתנים x_i כאשר $i \neq k$ כקבועים.

דוגמה 1

מצא את כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$

פתרון

נרשום את הפונקציה כך: $f(x, y, z) = x^z \frac{1}{y^z}$:

$$f'_x = \left[x^z \frac{1}{y^z}\right]'_x = \frac{1}{y^z}[x^z]' = \frac{1}{y^z} z x^{z-1}$$

$$f'_y = -z \frac{1}{y^{z-1}} x^z$$

$$f'_z=\left[\left(\frac{x}{y}\right)^z\right]'=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

דוגמה ב

חשב את הנגזרות החלקיות בכל נקודה עבור הפונקציה הנ"ל

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון

תחילה נגזור רפט לנקודה $(0,0)$

$$f'_x=\left[\frac{x^3}{x^2+y^2}\right]'_x=\frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f'_y=x^3\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_y=-x^3\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}2y=-\frac{2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

שתי הנגזרות הנ"ל טובות לכל נקודה פרט $(0,0)$. נזכיר כי אם הפונקציה לא הייתה רציפה ב$(0,0)$ אז ברור שאינה גזירה. במקרה שלנו נגזור לפי ההגדרה:

$$f'_x\left(0,0\right)=\frac{f\left(0+h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=1$$

$$f'_y\left(0,0\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(0,0+h\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{0^2+h^2}-0}{h}=0$$

ולכן לסיכום: $f'_x=\begin{cases}\dfrac{x^2\left(x^2+3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, באופן דומה עבור f'_y.

דוגמה 3

נתונה הפונקציה $g\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. ענו על הסעיפים הבאים:

א. האם $g\left(x,y\right)$ רציפה בנקודה $\left(0,0\right)$

דרגת מונה ומכנה שווים ולכן נשתמש בהצבה $y=kx$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-k^4x^4}{x^4+k^4x^4}=\frac{1-k^4}{1+k^4}$$

ולכן הגבול אינו קיים!

ב. חשבו את $g'_x\left(x,y\right)$ ואת $g'_y\left(x,y\right)$ עבור $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$

הכוונה למצוא נגזרות חלקיות:

$$g'_x=\frac{4x^3\left(x^4+y^4\right)-4x^3\left(x^4-y^3\right)}{\left(x^4+y^4\right)^2}$$

$$g'_y=\frac{-xy^3\left(x^4+y^4\right)-xy^3\left(x^4-y^4\right)}{\left(x^4+y^4\right)^2}=\frac{-8x^4y^2}{\left[x^4+y^4\right]^2}$$

ג. האם הנגזרות $g'_x\left(0,0\right)$ ו$g'_y\left(0,0\right)$ קיימות, אם כן חשב

נגזור לפי ההגדרה:

$$g'_x\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{g\left(h,0\right)-g\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4-0^4}{h^4+0^4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}=not\,exists\left(\pm\infty\right)$$

$$g'_y\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^4}{h^4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{h}=not\,exists$$

ד. האם g'_x רציפה?

ברור שלא! כי בנקודה $\left(0,0\right)$ לא קיים הגבול.

הערה: אם כן קיים הגבול היינו משאיפים את סעיף ב' לאפס ומחליטים האם היא רציפה.

דיפרנציאביליות

הגדרה

יהי $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום. תהי $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ פונקציה. תהי $\vec{p}\in int\left(\Omega\right)$ ויהי $\vec{h}\in\mathbb{R}^n$ וקטור.

f נקראת דיפרנציאבילית בנקודה p אם קיים אופרטור לינארי $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש

$$f\left(\vec{p}+\vec{h}\right)-f\left(\vec{p}\right)=L\left(\vec{h}\right)+o\left(\|\vec{h}\|\right)$$

לL קוראים הפירנציאל של f בנקודה $\vec{p}$ ומסמנים $L=df_p$.

תזכורת

אומרים שפוניציה היא "או" קטן של פונקציה של $g\left(x\right)$ ומסמנים $f\left(x\right)=o\left(g\left(x\right)\right)$ אם $\lim\limits_{x\to0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=0$. נייצג את df_p ע"י מטריצה באופן הבא:

$$df_p\left(\vec{h}\right)=\begin{pmatrix}f'_{1x_1}\left(p\right) & \cdots & f'_{1x_n}\left(p\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f'_{mx_1}\left(p\right) & \cdots & f'_{mx_n\left(p\right)}\end{pmatrix}$$

מטריצה זו נקראת מטריצת ג'קובי או יעקוביאן. אם $m=1$ אז יש רק שורה אחת במטריצה ואז נסמן את האופרטור ע"י $\nabla f\left(p\right)$. הכוונה לגרדיאנט של f.

דוגמה 4

מצאו את הדפרנציאל של $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כאשר $f\left(x,y\right)=\left(xy,x^2y,x^3y^3\right)$

פתרון

נסמן: $f_1=xy,f_2=x^2y,f_3=x^3y^3$ כי $f=\left(f_1,f_2,f_3\right)$

הנגזרות החלקיות:

$$f'_{1x}=y,f'_{1y}=x$$

$$f'_{2x}=2xy,y,f'_{2y}=x^2$$

$$f'_{3x}=3x^3y^3,f'_{3y}=3x^3y^3$$

נבחר ווקטור כללי $\vec{h}\in\mathbb{R}^2$, נסמן ב$\vec{h}=\left(h_1,h_2\right)$. ולכן הדיפרנציאל הוא:

$$df_{\left(x,y\right)}\left(\vec{h}\right)=\begin{pmatrix}y & x\\ 2xy & x^2\\ 3x^2y^3 & 3x^3y^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}$$

כדי להראות דיפרנציאביליות

בנקודה $\vec{p}$ מספיק לראות $\lim\limits_{h\to0}\frac{f\left(p+\vec{h}\right)-f\left(p\right)-L\left(h\right)}{\|h\|}=0$

הסבר

$$f(p+h)-f(p)=L(h)+o(\|h\|)$$

$$f(p+h)-f(p)-L(h)=o(\|h\|)$$

נחלק את כל המשוואה ב$\|h\|$. ברור שכאשר $\|h\|\to 0$, $\frac{o(\|h\|)}{\|h\|}\to 0$

$$\frac{f(p+h)-f(p)-L(h)}{\|h\|}=\frac{o(\|h\|)}{\|h\|}$$

נשאיף את h לאפס!

דוגמה 5

האם $f(x,y)=3x^2y+4y^2$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$? אם כן אראה זאת!

פתרון

נחשב נגזרות חלקיות:

$$f'_x=6xy, f'_y=3x^2+8y$$

ביקשו בנקודה $(0,0)$

$$f'_x(0,0)=0, f'_y(0,0)=0$$

ולכן

$$\nabla f(0,0)=(0,0)$$

במקרה שלנו נסמן $\vec{h}=(h_1,h_2)$. ברור כי $\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$. נשאר לחשב את הגבול הבא:(β במקרה שלנו $(0,0)$)

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-(0h_1+-h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2\to 0)}\frac{3h_1^2h_2+4h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

נוכיח בעזרת משפט הסנדוויץ שזה שואף לאפס:

$$0\le\left|\frac{3h_1^2h_2+4h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\le\frac{3h_1^2|h_2|+4h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\frac{3\left(h_1^2+h_2^2\right)|h_2|+4\left(h_1^2+h_2^2\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=3\sqrt{h_1^2+h_2^2}|h_2|+4\sqrt{h_1^2+h_2^2}\to 0$$

ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית ב$(0,0)$

כללים לגבי נגזרות חלקיות ודיפרנציאביליות

(א) אם הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות $\Leftarrow$ דיפרנציאבילית.

(ב) אם הפונקציה דיפרנציאבילית אז הנגזרות חלקיות אבל לא בהכרח רציפות.

(ג) אם הפונקציה דיפרנציאבילית אז היא בהכרח רציפה.