מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132)
פתרון מבחן לדוגמה

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על <u>כל</u> השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

<u>ניקוד</u>: שאלה ראשונה שווה 15 נקודות, כל סעיף בשאלות 2-5 שווה 10 נקודות. שאלת בונוס שווה 7 נקודות.

- שאלה 1 היא שאלת הוכחה וההוכחה נמצאת בסיכומי ההרצאות שלכם.
- שאלות 2,3 לקוחות מתרגילי הבית ומהתרגולים (הפתרונות נמצאים באתר).

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו את מבחן Leibniz (עבור טור עם סימנים מתחלפים):

נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ הוא טור עם סימנים מתחלפים (כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא טור חיובי).

אם מתקיים:

א. $a_n \geq a_{n+1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$;

ב. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$;

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

<u>שאלה 2</u>

א. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\ln n)^2}$, במידה וקיים.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם מתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ אזי $\langle a_n\rangle$ היא סדרת קושי (Cauchy).

<u>שאלה 3</u>

א. נתון שהפונקציה $f(x)=\begin{cases} ax+b & x\geq 0 \\ \cos x & x<0 \end{cases}$ גזירה בכל נקודה.

מצאו את a,b ($a,b\in\mathbb{R}$).

ב. מצאו $\frac{dy}{dx}$ עבור $x=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}-1$ $(y>0)$ (ניתן להשאיר את התשובה כפונקציה של y).

<u>שאלה 4</u>

קבעו לגבי כל טור האם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר:

א. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+1}{3^n-2}$

<u>**פתרון**</u>

נבדוק תחילה התכנסות בהחלט.

טור הערכים המוחלטים הוא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{2^n+1}{3^n-2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\right|\left|\frac{2^n+1}{3^n-2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n-2}.$$

- שימו לב שהגדלנו את האינדקס n ב-1. זאת על מנת שהביטוי $\frac{2^n+1}{3^n-2}$ יהיה חיובי ונוכל להיפטר מהערך המוחלט.

מותר לעשות זאת שכן (כפי שהוכחנו בהרצאה) הטור מתכנס אמ"מ כל זנב שלו מתכנס.

נבדוק התכנסות לפי מבחן המנה. לשם כך יש לחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

אצלנו: $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}-2},\ a_n=\frac{2^n+1}{3^n-2}$ ולכן

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}-2}}{\frac{2^n+1}{3^n-2}}=\frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}-2}\cdot\frac{3^n-2}{2^n+1}=\frac{2\cdot2^n+1}{3\cdot3^n-2}\cdot\frac{3^n-2}{2^n+1}.$$

נכפיל את שני השברים ונקבל: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2\cdot2^n+1}{3\cdot3^n-2}\cdot\frac{3^n-2}{2^n+1}=\frac{2\cdot6^n-4\cdot2^n+3^n-2}{3\cdot6^n+3\cdot3^n-2\cdot2^n-2}$.

נחלק את הכל ב- 6^n ונקבל: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2-4\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n-\frac{2}{6^n}}{3+3\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^n-\frac{2}{6^n}}$. נשים לב ש:

$\left(\frac{2}{6}\right)^n\to0,\ \left(\frac{3}{6}\right)^n\to0,\ \frac{2}{6^n}\to0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$. מכיוון ש- $\frac{2}{3}<1$, נקבל לפי מבחן המנה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n-2}$ מתכנס, ולכן הטור המקורי $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+1}{3^n-2}$ <u>מתכנס בהחלט</u>.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^2 n}{n^3+1}$

<u>פתרון</u>

תחילה שימו לב שזהו טור חיובי. אינטואיטיבית הוא מתנהג כמו $\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$ ומכיוון שהטור $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס, ננסה להראות שגם הטור שלנו מתכנס. לשם כך ניעזר במבחן ההשוואה וננסה להשוות אותו לטור $\sum\frac{1}{n^2}$.

מכיוון ש- $\sin^2 n\le 1$ נקבל $\frac{n\sin^2 n}{n^3+1}\le\frac{n\cdot 1}{n^3+1}\le\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$.

כלומר $\frac{n\sin^2 n}{n^3+1}\le\frac{1}{n^2}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^2 n}{n^3+1}$ <u>מתכנס</u>.

(אין טעם להגיד "מתכנס בהחלט", שכן זהו טור חיובי.)

ג. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

<u>פתרון</u>

הסדרה $a_n=\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ היא חיובית ויורדת לאפס ולכן ניתן להיעזר במבחן העיבוי. לפי מבחן העיבוי הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k\sqrt{\ln 2^k}}$ מתכנס. מתקיים:

$$\sum_{k=2}^{\infty}2^k\cdot\frac{1}{2^k\sqrt{\ln 2^k}}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k\ln 2}}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{\ln 2}}.$$

הטור $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ מתבדר לפי משפט שהוכחנו בהרצאה (הטור $\sum\frac{1}{n^p}$ מתכנס אמ"מ $p>1$)

ולכן גם הטור $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{\ln 2}}$ מתבדר.

לכן הטור המקורי <u>מתבדר</u> לפי מבחן העיבוי.

שאלה 5

א. תהי f פונקציה גזירה בנקודה x_0 ותהי $a\in\mathbb{R}$ נקודה כלשהי. הוכיחו שמתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{h}=af'(x_0).$$

פתרון

אם $a=0$ הטענה ברורה. אחרת, נכפיל ונחלק את הגבול ב- a. נקבל:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}a\cdot\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{ah}.$$

כעת, אם h הוא אינפיניטסימל שונה מאפס, אזי גם ah הוא אינפיניטסימל שונה מאפס. לכן לפי הגדרת הנגזרת של f בנקודה x_0 נקבל: $f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{ah}$. מכאן,

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{ah}$$ ולכן,

$$\lim_{h\to 0}a\cdot\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{ah}=a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{ah}=af'(x_0).$$

ב. תהי f פונקציה המקיימת $|f(x)|\le 1-\cos x$ לכל $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. הוכיחו שהפונקציה גזירה בנקודה $x=0$ ומצאו את נגזרתה.

פתרון

תחילה נבדוק מהו הערך של f בנקודה $x=0$. לפי הנתון מתקיים $|f(0)|\le 1-\cos 0$ ולכן $|f(0)|\le 0$ ומכאן $f(0)=0$.

נרשום את הגדרת הנגזרת בנקודה $x=0$:

$$f'(0)=\mathrm{st}\left(\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right)=\mathrm{st}\left(\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right).$$

כעת עלינו להראות שהנגזרת מוגדרת, כלומר שהביטוי $\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ הוא סופי. לפי הנתון מתקיים

$|f(\Delta x)|\le 1-\cos\Delta x$ ולכן $\frac{|f(\Delta x)|}{|\Delta x|}\le\frac{1-\cos\Delta x}{|\Delta x|}$.

לפי תכונת ערך מוחלט מתקיים $-\frac{1-\cos\Delta x}{|\Delta x|}\le\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\le\frac{1-\cos\Delta x}{|\Delta x|}$.

שימו לב ש- $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\cos\alpha-1}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}$, וכן אין חשיבות לסימן של α שכן $\cos$ היא פונקציה זוגית ($\cos\alpha=\cos(-\alpha)$).

לכן שני הביטויים בקצוות הם אינפיניטסימלים:

$$-\frac{1-\cos\Delta x}{|\Delta x|}=\frac{\cos\Delta x-1}{|\Delta x|}\approx 0$$

$$\frac{1-\cos\Delta x}{|\Delta x|}\approx 0$$

ומכאן גם הביטוי באמצע הוא אינפיניטסימלי, כלומר $\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\approx 0$.

לסיכום, הנגזרת בנקודה $x=0$ קיימת ומתקיים: $f'(0)=\operatorname{st}\left(\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right)=0$.

<u>שאלת בונוס</u>

תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה ונניח כי $0\in(a,b)$. נניח ש- f מונוטונית וכן מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=0$. הוכיחו ש- f גזירה בנקודה $x=0$.

<u>פתרון</u>

מכיוון שזו שאלת בונוס, הפתרון הוא <u>רמז</u>:

אם תנסו לצייר כמה ציורים של פונקציות מונוטוניות, אתם תראו שיש קשר בין המרחקים של ערכי הפונקציה. כלומר, בגלל שהפוקנציה מונוטונית מתקיים $|f(x)-f(-x)|\le|f(x)-f(0)|$.

(הערך המוחלט מימין מופיע בגלל שלא ידוע אם f עולה או יורדת. בעיקרון, ניתן להניח בה"כ שהיא עולה, אך זה לא מקצר בהרבה את הפתרון.)

בהצלחה בבחינה!