

מתמטיקה בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשעט, מועד א'

28.8.2019, כ"ז אב תשעט

מרצים: גברת תמר בר-און, ד"ר אפי כהן, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: עדי בן-צבי, אחיה בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, עובד נגר, עומר נטר, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל 5 השאלות.
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד.
ניתן להשתמש במחברת כטיוטא, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

1. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהיינה קבוצות A, B, C . הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B) \quad (\text{א})$$

$$(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C) \quad (\text{ב})$$

$$A \in C \text{ אם } B \in C \text{ ו } A \in B \quad (\text{ג})$$

$$C \cap A = C \cap B \text{ אם } C \setminus A = C \setminus B \quad (\text{ד})$$

דף נוסף לשאלה מספר ---

2. (15 נק') (א)

(א) כמה עוצמות שונות יש בקבוצה הבאה: $\{|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}|, |P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})|, |P(P(\mathbb{Z}))|, |P(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})|\}$.

(ב) מצאו את העוצמה של הקבוצה $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f^{-1}[\{1\}] = f^{-1}[\{2\}]\}$ (התשובה צריכה להיות אחת מהבאות: עוצמה סופית, \aleph_0 , \aleph , 2^{\aleph}).

דף נוסף לשאלה מספר ---

3. (24 נק', 8 נק' לסעיף) פונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ נקראת מחזורית אם קיים $p \in \mathbb{N}$ $1 \leq p$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = f(n + p)$.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מחזורית אז f אינה על.

(ב) הוכיחו/הפריכו: לכל $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מתקיים כי: אם f^2 מחזורית אז f מחזורית. [הערה: $f^2 = f \circ f$].

(ג) נגדיר $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ קבוצת כל הפונקציות המחזוריות. קבעו האם עוצמת הקבוצה A היא סופית, \aleph_0 , \aleph , או 2^{\aleph} . הוכיחו את קביעתכם.

דף נוסף לשאלה מספר ---

4. (20 נק'. 5 נק' לסעיף) תהא A קבוצה ויהא R יחס על A המתקיים:

$$\forall a, b, c \in A : (aRb \wedge bRc) \rightarrow cRa$$

(א) תנו דוגמה ליחס R כזה שאינו יחס שקילות.

(ב) הוכיחו שאם R גם רפלקסיבי אז הוא יחס שקילות.

(ג) **הוכיחו/הפריכו:** אם R גם טרנזיטיבי אז R סימטרי.

(ד) הוכיחו שאם R גם יחס סדר אז $R = I_A$ (כאשר I_A הוא יחס הזהות על A).

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

5. (21 נק').

(א) יהא $G = (V, E)$ גרף. נגדיר את הגרף המשלים להיות $\bar{G} = (V, \bar{E})$ כאשר \bar{E} מוגדרת ע"י: יש קשת בין שני קודקודים ב \bar{G} אם"מ אין בניהם קשת ב G (כלומר לכל קשת e מתקיים: $e \in \bar{E} \iff e \notin E$).
i. (3 נק') מצאו דוגמה ל G כך שב \bar{G} אין מסלול אוילר.

ii. (8 נק') הוכיחו כי אם G עם בדיוק שני קודקודים מדרגה זוגית ובנוסף \bar{G} קשיר אז ב \bar{G} יש מסלול אוילר.

(ב) (10 נק') נגדיר $a_0 = 1, a_1 = 2$ ולכל n טבעי, נגדיר $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים כי $a_n = n + 1$.

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---

דף נוסף לשאלה מספר ---