

תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. תהי $f(z)$ אנליטית בפנים ועל השפה של העיגול $\{z \mid |z - a| = R\}$. f כמובן חסומה על השפה של המעגל. נסמן ב M חסם, כלומר $|f(z)| \leq M$ לכל z כך ש $|z - a| = R$. הוכיחו כי

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$$

פתרון: נסמן ב Γ_R את העיגול שמרכזו ב a ורדיוסו R . לפי נוסחת קושי מתקיים

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

ולכן

$$|f^{(n)}(a)| \leq \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right|$$

לפי חסם ML . מתקיים

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{2\pi M}{R^n}$$

וכך מקבלים הדרוש.

2. מצאו את המקסימום והמינימום (הגלובאליים) של $f(z) = e^{z^2}$ בריבוע שקודקודיו, $0, 1, i, 1+i$.

פתרון: לפי עקרון המקסימום. המקסימום צריך להתקבל על השפה. היות שהפונקציה לא מתאפסת, גם המינימום מתקבל על השפה. השפה של הריבוע מורכבת מ 4 מסילות שאפשר לעשות להם פרמטריזציה כזאת:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2(t) &= i + t \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_3(t) &= it \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_4(t) &= 1 + it \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

נמצא מקסימום ומינימום גלובאליים על כל אחד מהם וככה נמצא את המקסימום והמינימום הגלובאליים הכלליים. עבור γ_1 : הפונקציה היא

$$e^{t^2}$$

ברור שהפונקציה הזאת מקבלת מינימום ב $t = 0$ שערכו 1 ומקסימום ב $t = 1$ שערכו e .

עבור γ_2 : הפונקציה היא

$$|e^{(i+t)^2}| = |e^{t^2+2it-1}| = e^{t^2-1}$$

כאן מתקבל מינימום ב $t = 0$ שערכו $\frac{1}{e}$ ומקסימום ב $t = 1$ שערכו 1.
עבור γ_3 הפונקציה היא

$$|e^{(it)^2}| = e^{-t^2}$$

כאן מתקבל מינימום עבור $t = 1$ שערכו $\frac{1}{e}$ ומקסימום עבור $t = 0$ שערכו 1.
עבור γ_4 הפונקציה היא

$$|e^{(1+it)^2}| = |e^{1+2it-t^2}| = e^{1-t^2}$$

כאן מתקבל מקסימום עבור $t = 0$ שערכו e ומינימום עבור $t = 1$ שערכו $\frac{1}{e}$.
בסך הכל קיבלנו שהמינימום הגלובאלי הוא $\frac{1}{e}$ והוא מתקבל בנקודה $z = i$ והמקסימום הגלובאלי הוא e והוא מתקבל בנקודה $z = 1$.

3. מצאו את כל נקודות המקסימום (הגלובאליות) של הפונקציה

$$f(z) = z^2 - 3z + 2$$

בעיגול $\{z \mid |z| \leq 1\}$
הדרכה: כתבו $z = x + iy$ (והשתמשו כמובן בעקרון המקסימום).
פתרון: נכתוב $z = x + iy$ ונקבל ש

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3yi + 2 \\ &= x^2 - y^2 - 3x + 2 + i(2x - 3)y \end{aligned}$$

אנחנו מחפשים למעשה מקסימום של הפונקציה

$$|f(z)| = \sqrt{(x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x - 3)^2 y^2}$$

לשמחתנו פונקציה זו מקבלת מקסימום בדיוק איפה שהפונקציה

$$|f(z)|^2 = (x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + (2x - 3)^2 y^2$$

מקבלת מקסימום מה שמביא אותנו לביטוי טיפה יותר נחמד.
אנחנו כמובן יודעים בוודאות שהמקסימום קיים כי כל הפונקציות רציפות על קבוצה סגורה וחסומה
לפי עקרון המקסימום, ידוע שמקסימום מתקבל בנקודה שנמצאת על שפת המעגל, דהיינו בנקודה שמקיימת $y^2 = 1 - x^2$. נציב גם את האינפורמציה הזאת ונקבל שמחפשים מקסימום עבור

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1 + x^2 - 3x + 2)^2 + (2x - 3)^2(1 - x^2) \\ &= (2x^2 - 3x + 1)^2 + (4x^2 - 12x + 9)(1 - x^2) \\ &= 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x^3 + 9x^2 - 3x + 2x^2 - 3x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 - 4x^4 + 12x^3 - 9x^2 \\ &= 8x^2 - 18x + 10 \end{aligned}$$

כלומר אנחנו מחפשים מקסימום של

$$f(x) = 8x^2 - 18x + 10$$

אבל נשים לב שאנחנו חיים בקטע $[-1, 1]$ (אלה הערכים האפשריים של x). נגזור ונקבל

$$f'(x) = 16x - 18$$

כלומר הפונקציה יורדת לאורך כל תחום ההגדרה ולכן המקסימום יהיה בנקודה $x = -1$ כלומר מקסימום יתקבל בנקודה $z = -1$

4. תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול היחידה (כלומר ב $\{z \mid |z| < 1\}$ עם התכונה שלכל z כך ש $0 < |z| < 1$ מתקיים ש $|f(z)| \leq \ln \frac{1}{|z|}$. הוכיחו כי f היא פונקציית האפס. **פתרון:** היות ש

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1}{x} = 0$$

ולפי סנדויץ אנחנו מקבלים ש

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = 0$$

ולכן אם נגדיר $g(z)$ לפי

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & |z| < 1 \\ 0 & |z| = 1 \end{cases}$$

אז זאת תהיה פונקציה אנליטית בפנים עיגול היחידה ורציפה על שפתו. לפי עקרון ה $\max$ היא מקבלת מקסימום על השפה. אבל הערך של $|g(z)|$ על עיגול היחידה עצמו הוא 0. ולכן בהכרח

$$g(z) = 0$$

ובפרט

$$f(z) = 0$$

כנדרש.