

תרגול 8

7 בדצמבר 2020

1 מקדמים בינומיים

תרגילים:

1. יהיו $n \geq k \geq m$ טבעיים. הוכיחו:

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{k-m}$$

פתרון: בדרך אלגברית אפשר לפתוח ולראות שזה קורה.

בדרך קומבינטורית: המטרה היא להראות ששני הצדדים סופרים את אותו הדבר, ולכן הם שווים. נראה שתי דרכים לספור את אותו הדבר. אנחנו סופרים בשני הצדדים את מספר האפשרויות לבחור תת קבוצה בגודל k מתוך $[n]$, כאשר m מתוכם מסויימים. בסיפור: רוצים לבחור ועד כיתה המונה 5 אנשים שמתוכם שלושה נציגים ידברו עם ההנהלה. ניתן לעשות זאת בשתי דרכים:

דרך ראשונה: לבחור תחילה את k האיברים, יש לזה $\binom{n}{k}$ אפשרויות, ולכל בחירה כזו, לבחור את m המסויימים, ויש לזה $\binom{k}{m}$ אפשרויות. סה"כ: $\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m}$, וקיבלנו את צד שמאל.

דרך שנייה: לבחור תחילה את m האיברים המסויימים, ויש לזה $\binom{n}{m}$, ואז לבחור את שאר $k-m$ האיברים מתוך שאר $n-m$ האיברים, ויש לזה $\binom{n-m}{k-m}$ אפשרויות. בסה"כ: $\binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{k-m}$, וקיבלנו את צד ימין ולכן יש שוויון.

2. הוכיחו: לכל $n \geq 4$ מתקיים:

$$\sum_{k=4}^n \binom{n}{k} \binom{k}{4} = \binom{n}{4} 2^{n-4}$$

פתרון: למדנו בשיעור: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, וכידוע גם יש 2^n תתי-קבוצות לקבוצה עם n איברים. אנחנו רואים בצד שמאל, שכל איבר בסכום הוא מספר האפשרויות לבחור

תת קבוצה בגודל k מתוך $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, ומתוכם 4 מסויימים. כיון שאנחנו סוכמים על k , זאת אומרת שצד שמאל סופר את האפשרויות לבחור תת קבוצה מגודל לפחות 4 (זה k שהוא לפחות 4 בסכום), שמתוכם 4 מסויימים. נספור זאת בדרך אחרת: נבחר תחילה 4 מסויימים (יש לזה $\binom{n}{4}$ אפשרויות), ולכל בחירה כזו נבחר תת קבוצה כלשהי מהנותרים ויחד הם יהיו את הבחירה של לפחות 4 מהקבוצה - כמה תתי קבוצות יש לנותרים? זה אנחנו יודעים שזה 2^{n-4} כי יש 2^{n-4} תתי קבוצות לקבוצה עם $n-4$ איברים. ולכן בסה"כ נקבל $\binom{n}{4} 2^{n-4}$.

2 עקרון שובך היונים

תרגילים:

- האם בישראל ישנם שני אנשים שנולדו באותו תאריך בשנה וארבע הספרות הראשונות שלהם בת"ז שוות?
פתרון: נבדוק כמה אפשרויות יש לתאריך וארבע ספרות ראשונות, ונבדוק האם יש יותר אנשים בישראל ממספר זה. ואכן, נניח לצורך הסיפור שיש 365 ימים בשנה, ומספר האפשרויות לארבע ספרות ראשונות זה 10^4 (כי זו בחירה עם חזרה ועם חשיבות לסדר) בסה"כ: $365 \cdot 10000 = 3650000$ אפשרויות לתאריך וארבע ספרות. בישראל יש יותר מכך אנשים, ולכן יש שניים עם אותו תאריך ואותן 4 ספרות ראשונות.
- הכללה: אם יש n יונים ו- $k \leq n$ שובכים, אז יש שובך עם לפחות $\frac{n}{k}$ יונים. הוכיחו שבכל קבוצה של שישה אנשים יש: שלושה מכירים כולם אחד את השני; או שלושה שאינם מכירים אחד השני.
פתרון: נתבונן באחד ספציפי נקרא לו בוב. נסמן ב- A את המכירים את בוב, ב- B את שאינם מכירים אותו. יש לנו חמישה אנשים שצריכים להיכנס לשתי קבוצות, ולכן אחת הקבוצות בגודל לפחות $\frac{5}{2}$ כלומר לפחות שלושה אנשים. נחלק למקרים:
אם $|A| \geq 3$: אם יש שם שנים שמכירים אחד את השני אז יחד עם בוב הם שלושה. אחרת, כל החברה ב- A לא מכירים אחד את השני ולכן יש שלושה שלא מכירים אחד את השני.
אם $|B| \geq 3$: אם יש שניים שלא מכירים אחד השני אז יחד עם בוב סיימנו. אחרת, כולם ב- B מכירים את כולם ומצאנו שלושה שמכירים אחד את השני.