תרגיל
$T,S:V\to V$ אופרטורים לינאריים, W תת מרחב T-אינווריאנטי.

א. הוכח כי אם W הוא גם S-אינווריאנטי אזי W הוא $T\circ S$-אינווריאנטי.

הוכחה
יהי $u\in W$. $v=S(u)\in W \Leftarrow T(v)=T\big(S(u)\big)=T\circ S(u)\in W$

ב. נניח שT הפיכה. האם W הוא T^{-1}-אינווריאנטי?

הוכחה
יהא $w_1,\dots w_k$ בסיס לW. כעת, מכיוון שT הפיכה, $T(w_1),\dots T(w_n)$ בסיס לW, ואז נסמן $v_i=T(w_i)$ $w_i=T^{-1}(v_i)\in W$. מכיוון ש$v_1,\dots v_n$ הולכים בT^{-1} לתוך W והם בסיס לW אנו מקבלים ש$T^{-1}(W)\in W$.

מכיוון שהתמונות של $v_1,\dots v_n$ תחת T^{-1} שייכות לW, ו$v_1,\dots v_n$ הוא בסיס לW, אנו מקבלים ש$T^{-1}(W)\subseteq W$.

תרגיל
תהי S קבוצה אורתוגונלית שלא כוללת את האפס. הוכח כי S בת"ל.

הוכחה
נניח בשלילה כי S ת"ל. אזי קיים צירוף לינארי $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$ כאשר $v_1,\dots v_n\in S$ שונים ולפחות $\alpha_i\neq 0$ לאיזשהו i.

$$0=\langle 0,v_i\rangle=\langle\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n,v_i\rangle=\alpha_1\langle v_1,v_i\rangle+\dots+\alpha_n\langle v_n,v_i\rangle=(*)$$

אולם, לכל $i\neq j$, $\langle v_j,v_i\rangle=0$ ולכן $(*)=\alpha_i\langle v_i,v_i\rangle$ אך $\alpha_i\neq 0$ וגם $\langle v_i,v_i\rangle\neq 0$ וזו סתירה.

תרגיל
$T:V\to V$ אופרטור לינארי. $W\subseteq V$ תת-מרחב T-אינווריאנטי. הוכח כי $W^\perp$ הוא T^*-אינווריאנטי.

פתרון
יהי $v\in W^\perp$. צריך להראות $T^*v\in W^\perp$.

יהי $w\in W$, צריך להראות ש$\langle w,T^*v\rangle=0$

נחשב $\langle Tw,v\rangle$

$\langle w,T^*v\rangle=\Big\langle\underbrace{Tw}_{\in W},\underbrace{v}_{\in W^\perp}\Big\rangle$ – v נמצא ב$W^\perp$. w נמצא בW, וW הוא T-אינווריאנטי, ולכן Tw נמצא בW.

ולכן $\langle Tw,v\rangle=0$ ולכן $\langle w,T^*v\rangle=0$

ב. נסמן ב- $\sigma(A)$ את הספקטרום (קבוצת הערכים העצמיים) של מטריצה ריבועית A. הוכיחו, לכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$: $\sigma(AB)=\sigma(BA)$. התייחסו במפורש למקרה של ערך עצמי 0.

אם $0=\lambda\in\sigma(AB)$ אז AB לא הפיכה, ולכן לפחות אחת מהמטריצות B,A לא הפיכה, ולכן גם $0=\lambda\in\sigma(BA)$. אם $0\neq\lambda\in\sigma(AB)$ אז $ABv=\lambda v$ עבור וקטור עצמי מתאים $v\neq\vec{0}$, ולכן גם $BABv=\lambda Bv$. הוקטור $Bv\neq\vec{0}$ (אחרת גם $\lambda v=ABv=\vec{0}$ בניגוד להנחה $\lambda\neq 0$), ולפיכך השוויון $(BA)Bv=\lambda Bv$ מוכיח כי $\lambda\in\sigma(BA)$. הוכחנו עד כה כי $\sigma(AB)\subseteq\sigma(BA)$, והחלפת תפקידי B,A מוכיחה את ההכלה בכיוון ההפוך.

ב. יהיו: V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, $T:V\to V$ אופרטור לינארי כלשהו. הוכיחו: $(\operatorname{im}T)^{\perp}=\ker T^{*}$

אם $u\in\ker T^{*}$ אז לכל $v\in V$ מתקיים $\langle T(v),u\rangle=\langle v,T^{*}(u)\rangle=\langle v,\vec{0}\rangle=0$, ולכן $u\in(\operatorname{im}T)^{\perp}$; ואם $u\in(\operatorname{im}T)^{\perp}$ אז, לכל $v\in V$, $\langle v,T^{*}(u)\rangle=\langle T(v),u\rangle=0$, ולכן $T^{*}(u)=\vec{0}$ כלומר $u\in\ker T^{*}$. בסה"כ: $u\in\ker T^{*}\iff u\in(\operatorname{im}T)^{\perp}$.

(א) האם הטענה נכונה עבור מטריצות לא הפיכות? כלומר־ הוכיחו/הפריכו:
לכל מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ לא הפיכה קיימת $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש $B^2=A$.

פתרון: הפרכה: $A=\begin{pmatrix}0&1\\&0\end{pmatrix}$ ננח בשלילה כי B מקיים $B^2=A$. אזי $B^4=A^2=0$ ולכן Bנילפוטנטית ולכן $p_B(x)=x^2$. אם $m_B(x)=x$ נקבל כי Bלכסינה ואזי גם $B^2=A$ לכסינה סתירה. לכן $m_B(x)=x^2$ ו Bדומה לצורת זורדן A כלומר קיימת P הפיכה כך ש $B=PAP^{-1}$ ולכן $A=B^2=PA^2P^{-1}=P0P^{-1}=0$. סתירה.

3. [7 נק' לסעיף] תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה עם ערכים עצמיים מהקבוצה $\{0,1\}$ בלבד (ייתכן כי ל A ע"ע יחיד). נסמן $\dim N(A-I)=m$. הוכיחו או הפריכו (m_A הוא הפ"מ של A ו p_A הוא הפ"א של A):

(א) הפ"א של A הוא $p_A(\lambda)=\lambda^{n-m}(\lambda-1)^m$

פתרון: כיון ש A לכסינה (ולכן הפ"א מל"ל) ו $0,1$ הם הע"ע היחידים האפשריים אזי $p_A(\lambda)=\lambda^k(\lambda-1)^t$ כאשר $k+t=n$. כיוון ש A לכסינה אזי הר"ג של 1 = לר"א של 1. ולכן כיוון שהר"ג של 1 הוא $\dim N(A-I)$ שנתון ששווה ל m ולכן $t=m$ ולכן $k=n-m$.

(ב) מתקיים $A=A^2$

פתרון: כיון ש A לכסינה $0,1$ אזי קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP=D$ כאשר D אלכסונית שעל האלכסון יש רק 0 או 1. בפרט $D^2=D$(וגם $D^k=D$ לכל k טבעי) ולכן

$$A^2=\left(PDP^{-1}\right)^2=PD^2P^{-1}=PDP^{-1}=A$$