תרגיל בית 4

1. תנו דוגמא לפונקציה f שאינה מדידה לבג אבל $|f|$ כן מדידה לבג.

2. תהי $\{A_i\}$ סדרה של קבוצות זרות במרחב מדיד (X,S) .

   i. יהיו $\{g_i\}_{i\geq 1}$ סדרה של פונקציות על X המדידות S . הראו כי $\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} g_i$ מתכנסת ומדידה S .

   ii. נניח כי $\bigcup_n A_n = X$. תהי $\mathscr{G} = \sigma(\{A_i : i \geq 1\})$ ופונקציה $h: X \to \mathbb{R}$. הראו כי h מדידה $\mathscr{G}$ אמ"מ h קבועה על כל A_i .

3. יהי מרחב מדיד (X,S) ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות f_1, f_2 ו f_3 ($f_i : X \to \mathbb{R}$ $(i=1,2,3)$). התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי משוואה ריבועית ב t לכל $x \in X$.

הראו כי $A \equiv \{x \in X : the\ equation\ has\ two\ distinct\ roots\}$ הינה מדידה S .

4. יהי מרחב מדיד (X,S) ויהיו f,g פונקציות מדידות S המקבלות ערכים ב $\mathbb{R}$. הראו כי הפונקציה $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} 1_{(g(x)\neq 0)}$ הינה מדידה S .

5. הוכיחו:

   א. לכל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה וחסומה הינה גבול של סדרת פונק' פשוטות המתכנסות במ"ש ל f .

   ב. אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ מדידה אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות כך ש $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ כאשר ההתכנסות היא נקודתית.