פתרון תרגיל בית 2 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

משתנים מקריים

תרגיל 1 (תזכורת מתורת המידה). יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד, ויהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים על Ω (כלומר פונקציות מדידות $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$). ודאו שאתם זוכרים מדוע הפונקציות הבאות גם מהוות משתנה מקרי: $X_1 + X_2$, $5 \cdot X_1$, $X_1 \cdot X_2$, $\limsup_{n\to\infty} X_n$.

בורל-קנטלי

תרגיל 2. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי-תלויים על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ עם התפלגות

$$P\left(X_n = n^3 - n^6\right) = \frac{1}{n^3}, \qquad P\left(X_n = n^3\right) = 1 - \frac{1}{n^3}.$$

מהו $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right]$? מהו $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^3}$?

פתרון. התוחלת היא

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] = \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) \cdot n^3 + \frac{1}{n^3} \cdot \left(n^3 - n^6\right) = n^3 - 1 + 1 - n^3 = 0$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right] = 0$.

מצד שני, כיוון ש-$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n = n^3 - n^6\right) < \infty$, לפי למת בורל-קנטלי המאורעות $\left\{X_n = n^3 - n^6\right\}$ מתרחשים רק מספר סופי של פעמים. לכן $X_n = n^3$ כמעט תמיד, ולכן $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^3} = 1$.

תרגיל 3. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות, ותהי $\{X_n : \Omega \to \mathbb{C}\}$ סדרת משתנים מקריים. הוכיחו שקיימת סדרת מספרים ממשיים חיוביים $\{c_n\}$ כך ש-$\lim_{n\to\infty} c_n X_n(\omega) = 0$ לכמעט כל $\omega \in \Omega$ (כלומר, הסיכוי שהגבול קיים ושווה ל-0 הוא 1).

(הדרכה: הראו שלכל n קיים k_n שעבורו $P\left(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega)| > k_n\}\right) < \frac{1}{2^n}$, והיעזרו בלמת בורל-קנטלי על המאורעות האלו.)

הוכחה. יהי n קבוע. נגדיר את הקבוצות

$$A_k = \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega)| > k\}.$$

נשים לב ש-A_k היא סדרת מאורעות מונוטונית יורדת וכן $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$; לכן $\lim_{k\to\infty} P(A_k) = 0$. זה מראה שלכל n קיים k_n שעבורו $P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega)| > k_n\}) \le \frac{1}{2^n}$.

נסמן $E_n = \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega)| > k_n\}$. לפי הלמה הראשונה של בורל-קנטלי, כיוון ש-$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \le 1 < \infty$, כמעט תמיד רק מספר סופי של E_n מתרחשים. נבחר ω השייך רק למספר סופי של E_n-ים; לפי ההגדרה, קיים $n_\omega \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_\omega$, $\omega \notin E_n$, כלומר $|X_n(\omega)| \le k_n$. נגדיר $c_n = \frac{1}{n \cdot k_n}$. אז לכל $n \ge n_\omega$,

$$|c_n X_n(\omega)| \le c_n \cdot k_n = \frac{1}{n}.$$

לפי כלל הסנדוויץ', $\lim_{n\to\infty} c_n X_n(\omega) = 0$. הראינו זאת על קבוצה מהסתברות 1, ולכן הגבול שווה ל-0 כמעט תמיד. □

תרגיל 4. נטיל מטבע מוטה עם הסתברות p ליפול על "פלי" והסתברות $1-p$ ליפול על "עץ" אינסוף פעמים (נניח $0 < p < 1$). התשובות לסעיפים הבאים עשויות להיות תלויות ב-p.

א. נתון $n \in \mathbb{N}$. מה ההסתברות שהרצף n פעמים "פלי" ייצא פעם אחת לפחות?

ב. נתון $n \in \mathbb{N}$. מה ההסתברות שהרצף n פעמים "פלי" ייצא אינסוף פעמים?

פתרון. לצורך הנוחות נזהה את "עץ" עם 0 ואת "פלי" עם 1. נגדיר סדרת משתנים מקריים $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ בלתי-תלויים.

1. בכל נקודה בזמן שמתחלקת ב-n, יש סיכוי p^n לקבל n פעמים "פלי". לכן המשתנה המקרי $Y = \inf\left\{m \mid \left(X_{mn}, \dots, X_{(m+1)n-1}\right) = (1, \dots, 1)\right\}$ המתפלג גיאומטרית עם הסתברות הצלחה p^n. בפרט $P(Y < \infty) = 1$.

2. שימו לב שזה מאורע זנב, אז ההסתברות שלו חייבת להיות 0 או 1. נראה שההסתברות היא 1. גם פה, בדומה לסעיף הקודם, נסתכל על חלונות לא חופפים בגודל n (כדי לקבל אי-תלות). ההסתברות ש-$\left(X_{mn}, \dots, X_{(m+1)n-1}\right) = (1, \dots, 1)$ היא p^n. כיוון ש-$\sum_{m=1}^{\infty} p^n = \infty$, נקבל שהמאורע מתרחש אינסוף פעמים לכל $p > 0$.

חוק ה-$0-1$ של קולמוגורוב

תרגיל 5. תהי Ω קבוצה, ויהיו $X_1, X_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ פונקציות. הוכיחו כי קיימת σ-אלגברה מינימלית על Ω, שנסמנה $\sigma\left(\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, שביחס אליה כל X_n מדיד.
(שימו לב שאם $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד וכל X_n הוא $\mathcal{F}$-מדיד, אז $\sigma\left(\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \mathcal{F}$).

הוכחה. נגדיר את $\mathcal{S}$ להיות אוסף כל ה-σ-אלגברות על Ω שביחס אליהן כל X_n מדיד. $\mathcal{S} \neq \varnothing$, כי $2^{\Omega} \in \mathcal{S}$. אם ניקח את החיתוך של כל איברי $\mathcal{S}$ נקבל σ-אלגברה, ואפשר לוודא מההגדרה שכל X_n יהיה מדיד ביחס אליה. □

תרגיל 6. תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים ממשיים, ויהיו s_n מ"מ ב"ת המתפלגים אחיד על הקבוצה $\{1, -1\}$. הסבירו מדוע המאורע $\left\{\sum_{n=1}^{\infty} s_n a_n < \infty\right\}$ הוא מאורע זנב ביחס ל-$s_1, s_2, \dots$. הסבירו את המשמעות.

הוכחה. זה חוק ה-$0-1$ של קולמוגורוב ביחס למשתנים המקריים $s_1, s_2, \dots$, שהרי התכנסות של טור לא תלויה באף מספר סופי שלהם. המשמעות היא שאם נבחר סדרת מספרים a_n, ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ "כמעט לא תלויה בסימנים שלהם": כמעט לכל בחירה של סימנים לאיברי הסדרה הטור יתכנס או יתבדר. □