תרגול 11 – מופשטת

הגדרה

תהא  חבורה הפועלת על קבוצה . נקודת שבת של היא נקודה  כך שמתקיים .

עבור  נסמן ב- את אוסף נקודות השבת של .

למשל: אם  אזי .

נאמר ש- היא נקודת שבת של  (או נקודת שבת משותפת) אם  לכל .

**תרגיל**

נתונה פעולה  כאשר . הוכיחו כי קיימת לפעולה זו לפחות נקודת שבת משותפת אחת.

פתרון

 נקודת שבת משותפת .

נתבונן בכל המסלולים של הפעולה וניקח מכל מסלול איבר מייצג אחד. נסמן את קבוצת המייצגים ב-. אזי מתקיים  ולכן .

כעת:  ולכן  ולכן  הוא סכום המספרים המחלקים את .  והמחלקים שלו הם  ולכן קיימים עבורם מתקיים .

ברור ש-  ולכן . אם  נקבל  וזאת סתירה. לכן  ולכן קיים מסלול שאורכו 1, ולכן קיימת נקודת שבת משותפת לפעולה.

מש"ל

**תרגיל (חלק עשו כבר בתרגול הקודם)**

מצאו את מספר המשולשים השונים (כלומר, עד כדי סיבוב או שיקוף) אשר מתקבלים ממשולש משוכלל נתון, אם מותר לצבוע קודקודים ב-3 צבעים שונים.

פתרון

נגדיר את  להיות קבוצת כל הצביעות האפשריות של קודקודי המשולש ונסתכל על .  פועלת על  כך:



ומבחינתנו זה אותו המשולש. אם נרצה לספור כמה משולשים שונים יש, עלינו לספור את המסלולים של הפעולה הזאת.

נבדוק עבור כל איבר מהו גודל קבוצת נקודות השבת שהוא יוצר:

עבור :  (ניתן לצבוע כל קודקוד בכל צבע)

עבור :  (אפשר לצבוע את הקודקודים רק בצבע אחד)

עבור : .

לכן מספר המסלולים הוא: .

מש"ל

**חבורות - P**

הגדרה

חבורה סופית  נקראת חבורתאם . (חבורה כללית נקראת חבורת אם כל איבר הוא מסדר חזקה של . זה שקול במקרה הסופי.)

הערה: (נוכיח שהמרכז של חבורת p הוא לא טריוויאלי).

 פועלת על עצמה על ידי הצמדה ולכן  כאשר  הם נציגים של מחלקות הצמידות. אם  אזי  ולכן . לכן  כאשר . לכן:  (וזאת משוואת המחלקות).

כמו כן, ידוע ש- .

נניח ש-, עבור ,  ראשוני ו- אינה אבלית. תמיד מתקיים. אם  אז נקבל: 

מספר שלא מתחלק ב-p

סכוםהמספריםהמחלקיםאת, וכלאחדמהםגדולממשמ-1 (שכןבחרנואתהאיבריםשלאנמצאיםבמרכז, ולכןגודלמחלקתהצמידותשלהםגדולמ-1 ממש. ולכןכלאחדמהמחובריםהואחזקהשלpולכןסכומםמתחלקב-P

ולכן.

לסיכום

אם  חבורת  אזי .

דוגמה למשוואת המחלקות

נכתוב את משוואת המחלקות של .

עבור  טריוויאלי. מחלקת צמידות נתונה ב  מורכבת מכל התמורות בעלות מבנה מחזורים זהה עבור איזשהו מבנה מחזורים.

משוואת המחלקות של  היא .במחלקת הצמידות  שלושה איברים ובמחלקת הצמידות  שני איברים.

תזכורת: המְרַכֵּז (centralizer) של איבר  הוא .

**תרגיל**

תהא  חבורה לא אבלית מסדר  (p ראשוני). נניח . הוכיחו: .

פתרון

מכיוון ש-  מתקיים .  ולכן  (כי ). כמו כן מתקיים  (ניתן לראות זאת גם ישירות וגם באמצעות העובדה שחיתוך כל המְרַכְזים הוא המֶרְכָּז).

 היא חבורת –p ולכן  ולכן . לא יתכן ש-  שכן אז  תהיה ציקלית בסתירה לטענה שהוכחנו. לכן . מתקיים ומכיוון ש-  מתקיים: . לכן ממשפט לגרנג' ניתן להסיק כי .

אם פועלת על עצמה על ידי הצמדה אזי  ולכן  ולכן .

מש"ל

דוגמה לתרגיל

. אזי  ולפי התרגיל נקבל ש-.

**תרגי**ל

תהי  חבורה מסדר  עבור  ראשוני ו-. תהי . הוכיחו ש- .

פתרון

קיים  כך ש- . מכיוון ש-  תח"נ, היא איחוד (זר) של מחלקות הצמידות שלה. מהם הסדרים האפשריים של המחלקות? חזקות של . נשים לב ש-  וזאת מחלקת צמידות מסדר 1. מתקיים  ולכן  כאשר  זה מספר המחלקות מסדר  (עבור ). נניח בשלילה שלכל  מתקיים . נשים לב שמתקיים . אך זאת סתירה, מכיוון ש-  מחלק את אגף ימין, ולא את אגף שמאל. לכן קיים  כך ש- . כלומר, קיים איבר נוסף ב- (פרט ליחידה) שמחלקת הצמידות שלו היא בגודל 1, ולכן הוא שייך למרכז. זה מוכיח הדרוש.

מש"ל

**משפט קושי**

תהא  חבורה סופית ויהי  מספר ראשוני. אם  אזי קיים ב- איבר מסדר.

**משפטי סילו**

הגדרה

תהא  חבורה, , . תת חבורה  נקראת תת חבורתp- סילו אם .

דוגמה

נמצא תת-חבורת 2-סילו ב-: כיוון ש  בהכרח חבורת 2-סילו היא מסדר 2. יש 3 ת"ח כאלה: . נשים לב שהראינו כעת שתת-חבורת p-סילו לא בהכרח יחידה! בנוסף גם הראינו שתת-חבורת p-סילו לא בהכרח תת-חבורה נורמלית.

נמצא תת-חבורת 3-סילו ב : כיוון ש  בהכרח חבורת 3-סילו היא מסדר 3. יש רק ת"ח אחת כזאת:  והיא נורמלית.

**משפט סילו 1**

תהא  חבורה סופית כך ש-, אזי קיימת ל- תת חבורה p- סילו.

טענה–האם רואים זאת בהרצאה?

בחבורת  יש תת חבורה מסדר כל חזקת  המחלקת את סדר החבורה (הוכחה: באינדוקציה על סדר החבורה בעזרת איבר מסדר  במרכז).

מסקנה (מהטענה וממשפט סילו 1)

לכל חבורה סופית , אם  מחלק את סדר החבורה, אזי קיימת תת חבורה מסדר .

דוגמה

 היא חבורה בה קיימת תת-חבורה 2-סילו שהיא  בעצמה, כיוון שמתקיים . לפי משפט קושי יש ת"ח של  מסדר 2 (למשל זו הנוצרת על ידי ). לפי המסקנה יש גם תת חבורה מסדר 4 (למשל זו הנוצרת על ידי).