תרגול 3

פונקציות רציפות:

1. ב l_∞ פונקצית ההטלה על רכיב i, $P_i : l_\infty \to \mathbb{R}$ ($P_i\left((x_n)\right) = x_i$) היא לפשיץ
הוכחה:
$$\left|P_i\left((x_n)\right) - P_i\left((x_n)\right)\right| = |x_i - y_i| \le \sup_n |x_n - y_n| = d_\infty\left(x, y\right)$$

2. אם $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ רציפה במ״ש אז תמונה של סדרת קושי $\{x_n\}$היא קושי.
הוכחה: יהא ϵ נתון. לפי נתון קיים δ כך ש
$$d(x', x") \le \delta \Rightarrow \rho\left(f(x'), f(x")\right) \le \epsilon$$
ובנוסף קיים n_0 כך ש
$$\forall n, m \ge n_0 : d(x_n, x_m) \le \delta$$
ולכן
$$\forall n, m \ge n_0 : \rho\left(f(x_n), f(x_m)\right) \le \epsilon$$
כנדרש.

   (א) הערה: עבור פונקציה רציפה הטענה לא נכונה בהכרח
   למשל: $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה ו $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}$ סדרת קושי (אינפי) אבל $\{f(x_n) = n\}$ אינה סדרת קושי.

3. אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה וחח״ע. אז ערך מוחלט שקול למטריקה $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$
הוכחה: אם $|x_n - x| \to 0$ אזי $\rho(x_n, x) = |f(x_n) - f(x)| \to 0$ מרציפות. בכיוון השני: אם $|f(x_n) - f(x)| \to 0$ כיוון ש f^{-1} רציפה נקבל כי $|x_n - x| \to 0$.

4. האם הבאות שקולות

   (א) $\mathbb{N}$ והמטריקה המושרית מהממשיים והדסקרטית.
   כן, כי כל סדרה מתכנסת בשתי המטריקות צריכה להיות קבוע לבסוף.

5. תרגיל: d, ρ שקולות ואחת שלמה- האם גם השניה שלמה?
פתרון: לא, למשל $f(x) = e^x$ אזי $\mathbb{R}, |*|$ שלם אבל $\mathbb{R}, d_f$ לא שלם. נימוק: $\left\{\ln \frac{1}{n}\right\}$ סדרת קושי אבל לא מתכנסת כי היא לא מתכנסת בערך מוחלט.
הפרכה שניה: $X = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ עם ערך מוחלט והדיסקרטית. עם הדיסקרטית נקבל מרחב שלם (כי תמיד זה שלם עם הדסקרטית) אבל עם ערך מוחלט לא. למה הם שקולות? כי בשניהם סדרות מתכנסות הם קבועות לבסוף (בערך מוחלט- כי הנקודות מבודדות).

רציפות לפי תמונה הפוכה של פונקציה רציפה

1. הוכיחו כי $A=\{(x,y):\ xy<1\}\subset\mathbb{R}^2$ פתוחה. הפונקציה $f(x,y)=xy$ רציפה ו A היא תמונה הפוכה של הקטע הפתוח $(-\infty,1)$

2. $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ ע"י $f_a(x)=d(x,a)$ רציפה. מסקנה: כדור סדור $B[a,r]$הוא קבוצה סגורה כי הוא תמונה הפוכה של קטע סגור $[0,r]$ של f_a רציפה

סגורים

1. $scl(X)=\{x: x_n\to x\}$

   (א) נגדיר l_∞ להיות הסדרות שמתאפסות לבסוף. מה $scl(A)$?
   פתרון: כל הסדרות (x_n)המקימות $\lim_x x_n=0$. הוכחה: בצד אחד בהינתן סדרה כזאת אזי a^n שווה ל n איברים הראשונים ואח"כ אפסים מקיימת $d(a^n,x)=\sup_{n<k}|x_k|\to 0$. מצד שני, אם x לא מקיים $\lim_n x_n=0$ אזי קיימים $\{n_k\}$ כך ש $|x_{n_k}|\geq\epsilon>0$ ולכן $d(a,x)\geq\epsilon$ לכל a ובפרט אין סדרה ששואפת אל x.

2. תהא $S\subseteq X$ סגורה ותהא s_n שיש לה גבול s אזי $s\in S$.
   הוכחה: אחרת $s\in S^c$ ויש כדור $B(s,r)$ שמוכל במשלים. אז לכל nמתקיים כי s_n לא בכדור ובפרט $d(s_n,s)\geq r$

3. A סגורה אמ"מ היא מכילה את כל הגבולות שלה. כלומר a_n ב A שיש לה גבול x אזי $x\in A$
   הוכחה: $(\Leftarrow)$ ראינו.
   $(\Rightarrow)$נראה כי A^c פתוח נניח כי לא. יש נקודה $x\in A^c$ שכל כדור סביבה נחתך עם A. אזי קיים $a_n\in B(x,\frac{1}{n})\cap A$ ואז $a_n\to x$ בסתירה לנתון.

4. ההגדרות הבאות ל $cl(A)$ שקולות:

   (א) $Y=\{x: d(x,A)=0\}$

   (ב) הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A. $Z=\cap_{A\subseteq S}S$
   הוכחה: Y סגורה ומכילה את A ולכן $Y\subseteq Z$. מצד שני: יהא $x\in Y$ נראה כי $x\in S$ לכל $A\subseteq S$. אכן יש סדרה x_n כך ש $d(x_n,x)\leq\frac{1}{n}$ ולכן x_nשואפת ל x. לפי טענה קודמת $x\in S$.

5. תרגיל לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה הגרף שלה $G_f=\{(x,f(x))\}$ סגור ב $\mathbb{R}^2$.
   הוכחה: תהא $(x_n f(x_n))$ סדרה שמתכנסת ל (x,y) אזי מהתכנסות רכיב רכיב $x_n\to x$ ולכן $f(x_n)\to y$ אומר ש $y=f(x)$ בגלל ש fרציפה ולכן $(x,y)=(x,f(x))\in G_f$ וסיימנו.

6. (X,d_X) (Y,d_Y) מ"מ. $B(X,Y)$ הפונקציות החסומות $f: X\to Y$ (כלומר $Im(f)$ חסומה) עם $d(f,g)=\sup_x d_Y(f(x),g(x))$.
   למה זה המטריקה מוגדרת? (תכונות מטריקה נשאיר כתרגיל) כי לכל x מתקיים כי

$$d_Y(f(x),g(x))\leq d_Y(f(x),f(x'))+d_Y(f(x')g(x'))+d_Y(g(x')g(x))<\infty$$

   ולכן מוגדר. הוכיחו כי אם Y שלם אז $B(X,Y)$ שלם (למשל l_∞ עם $X=\mathbb{N}$ ו $Y=\mathbb{R}$)
פתרון: $\{f_n\}$ סדרת קושי. לכן בפרט לכל x קבוע $\{f_n(x)\}$ סדרת קושי (כי $d_Y(f_n(x),f_m(x))\leq d(f_n,f_m)$) ולכן יש לה גבול $f(x)$.

טענה: $f \in B(X,Y)$, כלומר חסומה. אכן, יהא ϵ נתון. קיים n_0כך ש (מהגדרת סדרת קושי)

$$\forall n,m \geq n_0 d(f_n,f_m) \leq \epsilon$$

לכן עבור x קבוע מתקיים $d_Y(f_n(x),f_m(x)) \leq \epsilon$. בנוסף הפונקציה $F: Y \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $F(y)=d_Y(f_{n_0}(x),y)$ היא רציפה ולכן

$$d_Y(f_{n_0}(x),f(x)) = d_Y(f_{n_0}(x),\lim_m f_m(x)) = \lim_m d_Y(f_{n_0}(x),f_m(x)) \leq \epsilon$$

ולכן זה נכון לכל x (ובפרט $d(f_{n_0},f) \leq \epsilon$) ולכן, לכל x_1,x_2 מתקיים כי

$$d_Y f(x_1) f(x_2) \leq d_Y f(x_1) f_{n_0}(x_1) + d_Y f_{n_0}(x_1) f_{n_0}(x_2) + d_Y f_{n_0}(x_2) f(x_2) \leq 2\epsilon + r$$

כאשר $r = diam(Im(f_{n_0}))$. בנוסף, לכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$d(f_n,f) \leq d(f_n,f_{n_0}) + d(f_{n_0},f) \leq 2\epsilon$$

ולכן $f_n \to f$.

7. ניקח $Y=\mathbb{R}$ נקבע $z \in X$ ונגדיר $\varphi : (X,d) \to B(X,\mathbb{R})$ ע״י $\varphi(a) = \tilde{a}(x) = d_X(a,x) - d_X(z,x)$. נשים לב כי $\sup_x |\varphi(a)(x)| \leq d_X(a,z)$ ולכן $\varphi(a) \in B$. לכל $a \in X$. בנוסף,

$$d(\varphi(a),\varphi(a')) = \sup_x |\varphi(a)(x) - \varphi(a')(x)| = \sup_x |d_X(a,x) - d_X(z,x) - (d_X(a',x) - d_X(z,x))| = \sup_x |d_X(a,x$$

ומתקיים שיוויון עבור $x = a'$. ולכן $d(\varphi(a),\varphi(a')) = d_X(a.a')$ ולכן $\varphi : (X,d) \to (\varphi(X),d)$ איזומטריה.

8. מסקנה כל מ״מ משוכן במרחב שלם.

9. הגדרה X^* יקרא השלמה של X אם $X \subseteq X^*$ וגם X^* שלם ובנוסף $cl(X) = X^*$.

   (א) מסקנה: לכל מרחב יש השלמה. הוכחה: ניקח $cl(\varphi(X))$ ותראו כי הוא שלם כי תת מרחב סגור של מרחב שלם הוא שלם.

A' ונקודות מבודדות

1. A' = נקודות הצטברות = $\{a : a \in scl(A \setminus \{x\}\}$

2. טענה: A סגורה $\iff A' \subseteq A$.

3. $A'' \subseteq A'$ ולכן A' סגורה תמיד.
הוכחה: $x \in A''$ אזי $x = \lim a'_n$ ($a'_n \neq x$). לכל n נבחר $A \ni a_n \neq x$ כך ש $d(a_n,a'_n) \leq \frac{1}{n}$. כעת $d(x,a_n) \leq d(x,a'_n) + d(a'_n,a_n) \to 0$