

# חקב"צ - הרצאה 3

22 בנובמבר 2011

## שיטת ה Simplex

הבעיה - אותה הבעיה מהשיעור הקודם:  
פונק' המטרה:

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

אילוצים:

subject to:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_j \geq 0$$

נהפוך את אי השוויונות לשוויונות - נוסיף משתנה חוסר המצביע על החוסר בין אגף שמאל לימין.

$$x_1 \leq 4 \Rightarrow x_1 + x_3 = 4, x_3 \geq 0$$

לשם פתרון הבעיה בשיטת ה Simplex עלינו לדאוג שכל משתני ההחלטה יהיו גדולים או שווים ל-0:

$$x_2 \leq 6 \Rightarrow x_2 + x_4 = 6, x_4 \geq 0$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18, x_5 \geq 0$$

הבעיה בצורה החדשה היא:

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t:

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_4 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_j \geq 0$$

כלומר קיבלנו מערכת של 3 משוואות בחמישה נעלמים.  
כשיש לנו יותר נעלמים ממשוואות נבחר משתנים חופשיים שיסייעו לנו לפתור.

## הגדרות

- אם יש לנו  $m$  משוואות ב- $n$  נעלמים, פתרון בסיסי הינו פתרון המושג ע"י קביעת  $n - m$  המשתנים להיות 0 ופתרון ל- $m$  המשתנים הנותרים.  
חשוב לוודא כמובן שהפתרון הבסיסי יהיה אפשרי, כלומר שהאילוצים יתקיימו.  
לדוגמה, נקבע  $x_3 = x_4 = 0$  ונקבל:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 6$$

$$x_5 = -6$$

אך קיבלנו פתרון בסיסי, אך לא מתקיימים האילוצים.  
נניח שנקבע אחרת -  $x_1 = x_2 = 0$  ואז הפתרון הוא:

$$\begin{aligned}x_3 &= 4 \\x_4 &= 6 \\x_5 &= 18\end{aligned}$$

הפתרון הזה הוא פתרון בסיסי אפשרי - כל הפתרונות חיוביים, בחרנו את המשתנים המקוריים להיות שווים 0 ובמשתני החוסר קיבלנו ערכים חיוביים.

אם הגרף היה בנוי אחרת, והנק'  $(0, 0)$  לא הייתה חלק מהגרף, אז לא היינו יכולים לבחור נק' זו. שיטת Simplex היא שיטה טכנית למציאת פתרונות פיננטיים. מס' המשתנים הבסיסיים כמספר המש-וואות, נקראים הבסיס הנוכחי.

וכעת נשאל האם פתרון אפשרי-אופטימלי? אנו יודעים כי פתרון זה  $(0, 0)$  אפשרי אבל הוא לא אופטימלי כי המשתנים הלא בסיסיים מרכיבים את פונק' המטרה והיא כרגע 0.

אם נגדיל את אחד הלא-בסיסיים, פונק' המטרה תשתנה ותשתפר. במקרה זה, שיפור כל אחד מה-משתנים הלא בסיסיים ישפר את פונק' המטרה.

$x_2$ , במקרה שלנו, בעל השפעה גדולה יותר על פונק' המטרה, לכן נחליט להכניס אותו לבסיס.

לא ניתן להגדיל משתנה זה עד  $\infty$ , היות והוא מוגבל ע"י האילוצים. נסתכל על ההגבלות בהגדלת  $x_2$ :

הגבלה על $x_2$	השפעה על משתנים בסיסיים
אין הגבלה	$x_3 = 4 - x_1$
$x_2 \leq 6$	$x_4 = 6 - x_2$
$x_2 \leq 9$	$x_5 = 18 - 3x_1 - 2x_2$

לכן אנו יכולים להגדיל את  $x_2$  עד 6, לכן כאשר  $x_2$  ייכנס לבסיס  $x_4$  ייצא ממנו. המעבר מפתרון בסיסי אחד לשני מתבצע ע"י החלפת משתני הבסיס.

נכתוב את משוואת פונק' המטרה:

$$z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

כלל

בפונק' המטרה תמיד יהיו משתנים לא בסיסיים ונציג אותה כמו למעלה:

$$z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

כל עוד אחד המקדמים הוא שלילי, אזי הפתרון אינו אופטימלי.

## כללים למשוואות

1. משוואת  $z$  מכילה רק משתנים לא בסיסיים.

2. במשוואות האילוצים כל משוואה מכילה משתנה בסיסי אחד בלבד.

ע"פ הכללים הללו, העובדה ש  $x_2$  הוא בסיסי "פוסלת" את הפתרון מלהיות אופטימלי.  $x_2$  מופיע ב  $z$  ויש שני משתנים בסיסיים באילוץ 3.

לכן, ניפטר מ  $x_2$  באילוץ 3:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 4 \\x_2 + x_4 &= 6 \\3x_1 - 2x_4 + x_5 &= 6\end{aligned}$$

ונוציא את  $x_2$  מ  $z$ :

$$z - 3x_1 + 5x_4 = 30$$

קיבלנו מערכת משוואות חדשה. הבסיס כרגע הוא  $(x_3, x_2, x_5)$ .

נשארנו עם מקדם שלילי בפונק'  $z$  ולכן זה עדיין לא הפתרון האופטימלי. ניתן לשפר את  $z$  ע"י הגדלת  $x_1$  לכן ייכנס לבסיס.

נגדיל את  $x_1$  בהתאם להגבלות שלו:

השפעה על משתני בסיס	הגבלת
$x_3 = 4 - x_1$	$x_1 \leq 4$
$x_2 = 6 - x_4$	אין הגבלה
$x_5 = 6 - 3x_1 + 2x_4$	$x_1 \leq 2$

ולכן נארגן את מערכת המשוואות כך ש  $x_1$  ייכנס לבסיס בתור  $x_1 = 4$  ו  $x_5$  ייצא, והבסיס יהיה  $(x_1, x_2, x_3)$ .  
נוציא את  $x_1$  מאילוץ 1:

$$\begin{aligned} x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 &= 2 \\ x_2 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_4 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

ואז

$$z + 3x_4 + x_5 = 36$$

קיבלנו מערכת משוואות שעומדת בתנאים שהצבנו. כמו כן, במשוואת  $z$  אין מקדמים שליליים, ומכאן שזהו הפתרון האופטימלי.

### פתרון באמצעות טבלה

מעבר לאיטרציה הבאה	יחס	אגף ימין	$x_5$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$z$	משתנה בסיס	איטרציה
$5R_3 + R_1 \rightarrow R_1$ $-2R_3 + R_4 \rightarrow R_4$	$-\frac{4}{0}$ אין הגבלה	0	0	0	0	-5	-3	1	$z$	0
	$\frac{6}{1} = 6$	4	0	0	1	0	1	0	$x_3$	
	$\frac{18}{2} = 9$	6	0	1	0	1	0	0	$x_4$	
		18	1	0	0	2	3	0	$x_5$	
$R_4 + R_1 \rightarrow R_1$ $-\frac{1}{3}R_4 + R_2 \rightarrow R_2$ $\frac{1}{3}R_4 \rightarrow R_4$	$\frac{4}{1} = 4$	30	0	5	0	0	-3	1	$z$	1
	$-\frac{6}{0}$ אין הגבלה	4	0	0	1	0	1	0	$x_3$	
	$\frac{6}{3} = 2$	6	0	1	0	1	0	0	$x_2$	
		6	1	-2	0	0	3	0	$x_5$	
		36	1	3	0	0	0	1	$z$	2
		2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	0	$x_3$	
		6	0	1	0	1	0	0	$x_2$	
		2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$x_1$	

### הערות

- כל משתנה בסיסי מופיע רק במשוואה שלו ולא באף אחת אחרת.
- בודקים בשורה של  $z$  אם יש מקדמים שליליים. אם כן, נבחר את המשתנה עם המקדם השלילי ביותר (במינימום, החיובי ביותר) והוא יהיה המשתנה הנכנס לבסיס. אם יש שני ערכים זהים, הבחירה היא שרירותית.
- לאחר שבחרנו משתנה נכנס, נסמן את העמודה שלו. נסתכל על המנה של אגף ימין חלקי המקדם בעמודה שסומנה (נמצא את ההגבלה על המשתנה הנכנס). נבחר את ההגבלה המינימלית וכך ייבחר המשתנה היוצא. (באיטרציה הראשונה שלנו, יוצא  $x_2$  ו  $x_4$  נכנס).

והפתרון שקיבלנו הוא  $x_1 = 2, x_2 = 6, z = 36$ .