

פיסיקה למתמטיקאים סוגרי פואסון

1. נתון הלגראנז'יאן

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2\dot{y}^2) + \dot{x}y \sin x$$

(א) רשמו את ההמילטוניאן

$$\text{ונקבל } p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = x^2 y \cdot \dot{y} = p_x - y \sin x \text{ ולכן } p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + y \sin x$$

$$\dot{y} = p_y/x^2$$

ההמילטוניאן הינו $\mathcal{H} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L}$ ונקבל לבסוף

$$(2) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \left((p_x - y \sin x)^2 + \frac{p_y^2}{x^2} \right)$$

(ב) קבלו את משוואות התנועה

4 משוואות התנועה הן

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = p_x - y \sin x, \quad (3)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = p_y/x^2, \quad (4)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = (p_y - y \sin x)y \cos x + 2p_y^2/x^3, \quad (5)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = (p_x - y \sin x) \sin x. \quad (6)$$

(ג) עבור איזה ערך של הקבוע α $f = p_y + \alpha \cos x$ קבוע תנועה ?ולכן f קבוע תנועה אם $\{f, \mathcal{H}\} = 0$. נקבל אפוא

$$\begin{aligned} \{f, \mathcal{H}\} &= \frac{\partial(p_y + \alpha \cos x)}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} - \frac{\partial(p_y + \alpha \cos x)}{\partial p_x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial(p_y + \alpha \cos x)}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} - \frac{\partial(p_y + \alpha \cos x)}{\partial p_y} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \\ &= -\alpha \sin x (p_x - y \sin x) - (p_x - y \sin x)(-\sin x) = \\ &= (p_x - y \sin x)(-\alpha \sin x + \sin x) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

עבור $\alpha = 1$.