<u>פיתרון לתרגיל מספר 7 בסטטיסטיקה</u>

<u>תשובה 1:</u>

א. $\mathbb{A}_\Omega$ סיגמא-אלגברה. קיימת $A \subseteq \Omega \neq \emptyset$ לכן האוסף אינו ריק. $A \subseteq \Omega$ תת-קבוצה אזי $A^C = A - \Omega$ תת-קבוצה . כמו כן אם $\{A_i\}_{i\in I}$ $A_i \subseteq \Omega$ אזי $\bigcup_{i\in I} \mathrm{A_i} \subseteq \Omega$.

ב. וגם (ג):

- האוסף $\mathbb{A}_E$ אינו קבוצה ריקה מכיוון ש- $E \subseteq \mathbb{A}_E$.
- $\mathbb{A}_E$ היא σ־אלגברה. רואים את זה על ידי: אם $A \in \mathbb{A}_E$ אז הקבוצה A היא נמצאת בכל σ־אלגברה שבאוסף $\mathbb{A}_E$, אז גם $\overline{A}$ היא נמצאת בכל σ־אלגברה שבאוסף $\mathbb{A}_E$. לכן $\overline{A} \subset \mathbb{A}_E$. ואם יש לנו אוסף של קבוצות $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{A}_E$ אזי האוסף $\{A_i\}_{i\in I}$ מוכל בכל אחת מ- σ־אלגבראות שבאוסף $\mathbb{A}_E$, אז גם $\sum_{i\in I} A_i$ נמצא בכל אחת מ- σ־אלגבראות שבאוסף $\mathbb{A}_E$. לכן $\sum_{i\in I} A_i \in \mathbb{A}_E$.
- $\mathbb{A}_E$ היא σ־אלגברה מינימאלית היחידה שמכילה את E. באמת אם $\mathbb{B}_E$ היא σ־אלגברה מינימאלית שמכילה את E איז $\mathbb{A}_E \subseteq \mathbb{B}_E$ ולפי מינימאליות נקבל שמתקיים $\mathbb{A}_E = \mathbb{B}_E$.

<u>תשובה 2:</u>

הקבוצה הראשונה שהוגדרה אינה סיגמא אלגברה אם Y אינה בסיגמא אלגברה שכן אם Y אינה בסיגמא אלגברה אז $A^c \cap Y$ אינה באלגברה שכן אם היתה אז $A \cup (A^c \cap Y) = (A \cup A^c) \cap (A \cup Y) = Y$ לכן גם Y הייתה צריכה להיות באלגברה. אי לכך המשלימה של A ב-Y אינה נמצאת באוסף לכן זוהי אינה סיגמא אלגברה על Y. כמובן שאם $Y \in \mathbb{A}$ הטיעון האחרון לא יתקיים ותהיה בידינו סיגמא אלגברה.

הקבוצה השנייה היא סיגמא אלגברה:

נסמן $A_Y = \{A \cap Y : A \in \mathbb{A}\}$

$Y \cap X = Y \in A_Y$ כי $X \in \mathbb{A}$. אם $B \in A_Y$ אזי $B = A \cap Y$ עבור $A \in \mathbb{A}$ אזי $Y - B = (X - A) \cap Y \in A_Y$. בלסוף אם $B_i \in A_Y$ עם $B_i = A_i \cap Y$ אזי $\bigcup_i B_i = \bigcup_i A_i \cap Y = (\bigcup_i A_i) \cap Y \in A_Y$.

נעבור לסעיף ב. הוכחנו לעיל ש $\mathbb{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathbb{A}\}$ היא אכן סיגמא אלגברה על B.

לכן נותר להוכיח ש $P_B\colon \mathbb{A}_B \to [0,1]$ מקיימת את אקסימות פונקצית ההסתברות.

(א) $0 \leq P_B(F) = \frac{P(AB)}{P(B)} \leq 1$.

(ב) $P_B(B) = \frac{P(B \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

(ג) אם $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{A}_B$ כמשפחה זרה של קבוצות אזי $(F_i = A_i \cdot B)$ עם $A_i \in \mathbb{A}$, ולכן

$$P_B(\sum F_i) = \frac{P(\sum A_i B)}{P(B)} = \frac{\sum P(A_i B)}{P(B)} = \sum P_B(F_i).$$

תשובה 3:

א.האינטגרל צריך להיות 1:

(אפשר גם לפי חישובי שטחים של משולש + שני מלבנים):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^{1/2} 2xdx + \int_{1/2}^{1} dx + \int_1^2 cdx = x^2\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2} + c = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c = 1$$

$$c = \frac{1}{4}$$

ב.

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ a^2 & 0 \le a < 1/2 \\ 1/4 + (a - 1/2) & 1/2 \le a < 1 \\ 1/4 + 1/2 + (a-1)1/4 & 1 \le a < 2 \\ 1 & 2 \le a \end{cases}$$

ג. $$P\left(1/3 < X < 3/4\right) = F_X\left(3/4\right) - F_X\left(1/3\right) = 1/4 + \left(3/4 - 1/2\right) - \left(1/3\right)^2 = \frac{7}{18}$$

ד.   תוחלת של X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) = \int_0^{1/2} 2x^2dx + \int_{1/2}^{1} xdx + \int_1^2 \frac{1}{4}xdx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^{1/2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^{1} + \frac{x^2}{8}\Big|_1^2 = \frac{25}{24}$$

תשובה 4:

א.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot \cos xdx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c \cdot \cos xdx = c \cdot \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = c\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= c[1-(-1)] = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

ב.

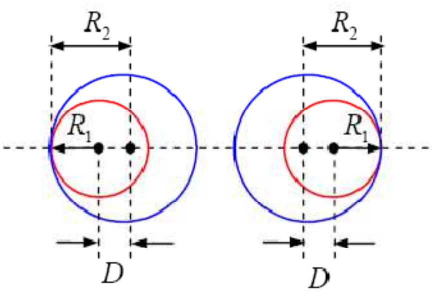
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X u du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos u du=\frac{1}{2}\sin u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x}=\frac{1}{2}\left[\sin x-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[\sin x+1]$$

ולכן

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}[\sin x+1] & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 1 & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

<u>תשובה 5:</u>



הציור מראה כי את ההסתברות הדרושה אפשר לכתוב בצורה

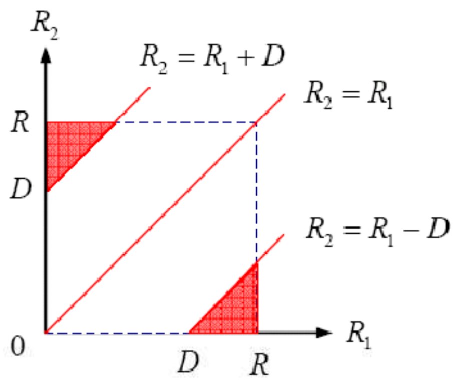
$$P_0=P(D\le R_2-R_1/R_2>R_1)P(R_2>R_1)$$
$$+P(D\le R_1-R_2/R_1>R_2)P(R_1>R_2)$$

מכאן ניתן לראות כי

$$P_0=P(D\le|R_2-R_1|).$$

כיוון ש— $R_1 \sim U(0,R)$ ו— $R_2 \sim U(0,R)$, מותר להשתמש בגישה הקלאסית להסתברות.

- עבור $0 \le D \le R$ מתקיים:



$$P_0 = \frac{\left|\{D \le |R_2 - R_1|\}\right|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(R-D)^2}{R^2}$$
$$= \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2.$$

- עבור $D > R$, ההסתברות $P_0 = 0$ כך שהתשובה הסופית היא

$$P_0 = \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2 \Theta(R-D).$$

באשר

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

תשובה 6:

$X \in [0,20]$

נחלק לשני מאורעות:

או שמספיקים לרכבת של 07:15, זאת אומרת ש X בין 0 לבין 5, או שמגיעים לרכבת של 07:30, זאת אומרת ש X בין 5 לבין 20.

$P(X \le 5) = F_X(5)$

עבור ערכי Y שבין 0 ל – 5 , ישנן שתי אפשרויות – או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת הראשונה (של ורבע) או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת השניה (של וחצי)

$$P(Y \le y) = P(X \in [5-y,5]) + P(X \in [20-y,20]) = F_X(5) - F_X(5-y) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

עבור ערכי Y שגדולים מ – 5, הם יכולים להתקבל רק אם נגיע לרכבת השניה (של וחצי), הסיכוי שנמתין לפחות y>5 דקות הוא הסיכוי להספיק לרכבת הראשונה (שכן אז נמתין פחות מ – y דקות), ועוד הסיכוי להמתין לפחות y דקות לרכבת השניה:

$$P(Y \le y) = P(X \in [0, 5] + P(X \in [20-y,20])) = F_X(5) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

ונגזור על-מנת לקבל צפיפות:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(5-y)+f_X(20-y) & 0\le y\le 5 \\ f_X(20-y) & 5\le y\le 15 \\ 0 & else \end{cases}$$