קצת אינפי 2:

נרצה לחשב את האינטגרל:

$$\int \sqrt{r^2+1}dx$$

נציב:

$$r = \tan\theta$$

כלומר, $\sqrt{r^2+1} = \sqrt{\tan^2\theta+1} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\cos\theta}$.

לכן:

$$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

ונקבל:

$$\int \sqrt{r^2+1}dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2\theta+1}}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1}}{\cos^2\theta}d\theta =$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta$$

כעת, נאטגרץ בחלקים:

$$u = \frac{1}{\cos\theta} \Longrightarrow u' = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\tan\theta}{\cos\theta}$$

$$v' = \frac{1}{\cos^2\theta} \Longrightarrow v = \tan\theta$$

ונקבל:

$$\int \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta = \frac{\tan\theta}{\cos\theta} - \int \frac{\tan^2\theta}{\cos\theta}d\theta = \frac{\tan\theta}{\cos\theta} - \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

כעת, $\int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta = \int \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta - \int \frac{\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$, ולכן:

$$\int \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta = \frac{\tan\theta}{\cos\theta} - \int \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta + \int \frac{\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

ואם כך:

$$\int \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\tan\theta}{\cos\theta} + \int \frac{1}{\cos\theta}d\theta\right)$$

כדי לחשב את $\int \frac{1}{\cos\theta}d\theta$ נציב $u = \sin\theta$ (מאד לא כדאי להשתמש בהצבה אוניברסלית אם אתם אוהבים לחיות). לכן: $du = \cos\theta d\theta$ ולכן:

$$\int \frac{1}{\cos\theta}d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}du = \int \frac{1}{1-\sin^2\theta}du = \int \frac{1}{1-u^2}du$$

קל לראות בעזרת שברים חלקיים ש: $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1-u}\right)$ ולכן:

$$\int \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1-u}\right)du = \frac{1}{2}\left(\ln(u+1) - \ln(1-u)\right)$$

נחזור ל-θ:

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin\theta+1}{1-\sin\theta}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sin\theta+1)(\sin\theta+1)}{(1-\sin\theta)(\sin\theta+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sin\theta+1)^2}{\cos^2\theta}\right) = \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

לכן נקבל:

$$\int \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\tan\theta}{\cos\theta} + \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right)$$

ונחזור בחזרה ל-x:

$$\tan\theta = r, \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{r^2+1}$$

ולכן:

$$\frac{\tan\theta}{\cos\theta} = r\cdot\sqrt{r^2+1}$$

$$\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \ln\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right) = \ln\left(\sqrt{r^2+1} + r\right)$$

לכן:

$$\int \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta = \frac{1}{2}\left(r\sqrt{r^2+1} + \ln\left(\sqrt{r^2+1}+r\right)\right)$$

ובסך הכל האינטגרל שלנו הוא:

$$\int \sqrt{r^2+1} dx = \frac{1}{2}\left(r\sqrt{r^2+1} + \ln\left(\sqrt{r^2+1}+r\right)\right)$$

הערה: הקובץ נכתב תוך כדי האזנה ל"בואי הלנה".